THÈSES

présentées

A L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE

DOCTEUR ES - SCIENCES PHYSIQUES

par

Jacques MONTLUÇON

Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique

Licencié ès Sciences

Première Thèse

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT DE GOUTTES D'EAU DANS UNE ATMOSPHERE DE VAPEUR SURCHAUFFEE

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté

APERÇU DES METHODES NUMERIQUES EN USAGE EN MECANIQUE DES FLUIDES

Soutenues le 29 Juin 1972 devant la Commission d'Examen

JURY

Président : L. NEEL, *Membre de l'Institut*

Examinateurs : J. KRAVTCHENKO

L. SANTON

A. CRAYA, *rapporteur*

Invité : J.P. MILLIAT

THÈSES

présentées

A L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE

DOCTEUR ES - SCIENCES PHYSIQUES

par

Jacques MONTLUÇON

Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique

Licencié ès Sciences

Première Thèse

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT DE GOUTTES D'EAU DANS UNE ATMOSPHERE DE VAPEUR SURCHAUFFEE

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté

APERÇU DES METHODES NUMERIQUES EN USAGE EN MECANIQUE DES FLUIDES

Soutenues le 29 Juin 1972 devant la Commission d'Examen

JURY

Président : L. NEEL, *Membre de l'Institut*

Examinateurs : J. KRAVTCHENKO

L. SANTON

A. CRAYA, *rapporteur*

Invité : J.P. MILLIAT

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures

UNIV. LEIDEN

MM.	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale

MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale

MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERNECES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 8 Juin 1971

Avant-propos

Les travaux présentés dans cette étude ont été effectués dans les laboratoires de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France et je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à Monsieur HUG, Directeur à Electricité de France,Monsieur FAURE et Monsieur MILLIAT,Chefs de Service à la Direction des Etudes et Recherches qui ont été à l'origine de ces travaux et ont bien voulu y porter un intérêt qui a constitué pour moi un précieux encouragement.

Monsieur le Professeur NEEL, Membre de l'Institut Prix Nobel de Physique m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury d'examen. Qu'il trouve ici l'expression de mes respectueux remerciements.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur CRAYA d'avoir bien voulu assurer la direction de ces thèses. Sa profonde connaissance des problèmes de mécanique des fluides , son exigeante rigueur scientifique et l'inlassable sollicitude avec laquelle il a guidé mon travail ont orienté de manière fondamentale l'ensemble de mes recherches et ont constitué pour moi l'aide la plus précieuse. Je suis heureux de lui exprimer ici l'hommage de ma gratitude.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur le Professeur KRAVTCHENKO et Monsieur le Professeur SANTON qui m'ont fait l'honneur de participer à la commission d'examen.

J'ai trouvé auprès du personnel de la Direction des Etudes et Recherches un accueil sympathique et une aide précieuse. En particulier Monsieur CASEAU Chef de Service à la Direction des Etudes et Recherches, Monsieur BETBEDER-MATIBET, Monsieur RONAT et Monsieur SONNEVILLE, Ingénieurs à Electricité de France, m'ont fait bénéficier de leurs conseils et de leurs critiques au cours de nombreuses et fructueuses discussions. Qu'ils trouvent ici mes remerciements.

Je tiens enfin à remercier Monsieur EAUCLERE dont l'aide efficace et dévouée a contribué à la bonne conduite de la partie expérimentale de ce travail.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544309_0050

Sommaire général

INTRODUCTION

CHAPITRE I : COMPORTEMENT D'UNE GOUTTE D'EAU IMMOBILE DANS UNE ATMOSPHERE CALME DE VAPEUR SURCHAUFFEE (extension au changement de phase pour diverses configurations d'interface).

CHAPITRE II : COMPORTEMENT D'UNE GOUTTE D'EAU EN MOUVEMENT RELATIF PAR RAPPORT A UNE ATMOSPHERE CALME DE VAPEUR SURCHAUFFEE.

CHAPITRE III : INSTALLATION EXPERIMENTALE.

CHAPITRE IV : RESULTATS EXPERIMENTAUX.

CONCLUSION

Introduction

L'analyse du comportement de gouttes d'eau dans une atmosphère calme de vapeur surchauffée est un problème qui fait intervenir un seul constituant sous deux phases distinctes. Les problèmes diphasiques ont été beaucoup étudiés au cours des dernières décennies mais on doit remarquer que les analyses concernant les phénomènes où la phase liquide est dispersée sont beaucoup moins nombreuses que celles traitant des problèmes dans lesquels la phase gazeuse est dispersée. Certes, les applications des premières sont actuellement moins importantes en ce qui concerne l'industrie énergétique mais on ne saurait les négliger pour autant. En dehors de l'industrie chimique où les changements de phase avec phase liquide dispersée jouent un rôle essentiel, on ne saurait oublier les phénomènes intervenant dans certains éléments des circuits de vapeur des centrales thermiques classiques et nucléaires. Certains organes de régulation, appelés désurchauffeurs, utilisent les interactions entre l'eau pulvérisée et la vapeur environnante pour régler de manière précise et rapide la température de la vapeur à l'entrée des turbines. Les phénomènes mis en jeu sont mal connus et c'est pour tenter de les préciser que cette étude a été entreprise.

Le présent travail a pour but d'analyser théoriquement et expérimentalement le comportement de gouttes d'eau situées dans une atmosphère de vapeur surchauffée. Le problème général du comportement d'un ensemble de gouttes dans un écoulement turbulent de vapeur surchauffée présente un très grand intérêt pratique mais ne saurait être abordé directement. La mise en oeuvre de modèles diphasiques à variables locales nécessite la connaissance préalable des interactions d'un écoulement de vapeur avec une goutte isolée, interactions qui se traduisent par un nombre de NUSSELT de la goutte et un coefficient de traînée correspondant . Un tel problème diphasique posé au niveau d'une goutte isolée présente encore d'importantes difficultés et rend nécessaires de nombreuses études approfondies de ses différents aspects. La détermination du nombre de NUSSELT et du coefficient de traînée d'une goutte en fonction des divers paramètres caractérisant le liquide et la vapeur peut être effectuée à partir d'études expérimentales qui aboutissent à des formules de corrélation. Ces formules rendent compte de résultats expérimentaux mais ne permettent pas de mieux comprendre la nature des phénomènes. En outre, le nombre élevé des paramètres du problème rend très aléatoire l'établissement de formules de corrélation générales.

Le problème envisagé de l'interaction d'une goutte avec la vapeur environnante est un problème de transferts de chaleur et de masse fortement couplés au niveau de la goutte. Sa résolution implique la détermination simultanée au voisinage de la surface de la goutte des distributions instantanées de vitesse et de température au sein du liquide et de la vapeur. Nous allons effectuer cette détermination dans deux cas qui font l'objet des deux premiers chapitres de ce travail.

Dans le premier chapitre, nous étudions de manière approfondie l'évolution d'une goutte immobile dans une atmosphère calme de vapeur surchauffée. Nous déterminons l'évolution de la goutte en fonction des paramètres constitués par la température initiale du liquide et la surchauffe de la vapeur.

Dans le deuxième chapitre est présentée une détermination analytique des résultats des interactions de la goutte et de la vapeur dans le cas d'un écoulement caractérisé par une faible valeur du nombre de REYNOLDS relatif à la goutte. Nous supposons uniforme la température du liquide et étudions l'influence de la surchauffe sur les interactions entre transfert de chaleur et transfert de masse.

Ces études théoriques sont complétées par une étude expérimentale directe de l'évolution de gouttes d'eau en atmosphère de vapeur surchauffée. Cette étude nous a conduits à mettre au point un dispositif original de production et d'observation de gouttes dont la description fait l'objet du chapitre III.

Les résultats expérimentaux sont présentés au cours du chapitre IV, où ils sont comparés avec les résultats théoriques obtenus aux chapitres I et II.

Tout au long de cette étude, nous nous attachons à considérer des gouttes caractérisées par de faibles valeurs du nombre de REYNOLDS (construit à partir du rayon et de la vitesse relative par rapport à la vapeur). Ce cas est important en pratique ; il concerne toutes les pulvérisations fines de liquide en dehors de la zone immédiatement située au voisinage de l'orifice d'injection.

Chapitre I

Comportement d'une goutte d'eau immobile dans une atmosphère calme de vapeur surchauffée

(Extension au changement de phase pour diverses configurations d'interfaces)

S O M M A I R E

Pages

I - INTRODUCTION 25

II - POSITION DU PROBLEME 27

A - CADRE DE L'ETUDE 27

B - ETABLISSEMENT DES EQUATIONS 29

C - REDUCTION DU SYSTEME D'EQUATIONS 30

III - RESOLUTION 32

A - RECHERCHE DE SOLUTIONS ANALYTIQUES 32

1. Recherche de solutions affines 32

2. Etude de la solution affine dans le cas de l'interface plan 34

a) Détermination de la solution 34

b) Débit massique : critère de comportement 37

3. Recherche de solutions indépendantes du temps 39

4. Etude des solutions indépendantes du temps : discussion .. 43

5. Etude du cas de l'interface sphérique 44

a) Influence des variations des propriétés physiques 44

b) Evolution de la goutte : comparaison avec les expériences. 47

B - RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME COMPLET 47

1. Traitement des équations 47

2. Résolution numérique 51

a) Méthode 51

b) Traitement des conditions initiales 52

Pages

IV - RESULTATS 53

A - GENERALITES 53

B - CONDENSATION - CROISSANCE INITIALE DU RAYON 54

1. Vapeur saturée 54

2. Vapeur surchauffée 54

C - EVAPORATION DES GOUTTES 55

V - CONCLUSION 57

N O T A T I O N S

		Dimensions
a_p	Coefficient d'absorption	[O]
C_p	Chaleur spécifique à pression constante	$[L^2\ T^{-2}\ \theta^{-1}]$
K	Conductivité thermique	$[M\ L\ T^{-3}\ \theta^{-1}]$
q_R	Flux d'énergie transmise par rayonnement	$[M\ L^2\ T^{-3}]$
s	Variable d'espace adimensionnelle : $\frac{x}{X\ (O)}$	[O]
t	Temps	[T]
x	Variable d'espace	[L]
B_1	$(H_1 - H_s)\ /\ \Delta[H]$	[O]
B_2	$(H_2 - H_{sat})\ /\ \Delta[H]$	[O]
$\dot{E}$	Flux d'énergie	$[M\ L^2\ T^{-3}]$
H	Enthalpie massique	$[L^2\ T^{-2}]$
$\dot{M}$	Débit massique	$[M\ T^{-1}]$
N	Exposant caractérisant la géométrie	
P	Pression	$[M\ L^{-1}\ T^{-2}]$
S	Entropie massique	$[L^2\ T^{-2}\ -1]$
T	Température	[θ]
U	Vitesse	$[L\ T^{-1}]$
V	$U\ \sqrt{t}$	$[L\ T^{-1/2}]$
X	Position de l'interface	[L]

		Dimensions
β	$\frac{C_p}{\rho K}$	$[M^{-2}\ L^{4}\ T]$
γ	$\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}$	[O]
η	$\int_0^{\xi} \rho(s)\ d\ s$	$[M\ L^{-2}\ T^{-1/2}]$
λ	K/C_p	$[M\ L^{-1}\ T^{-1}]$
ν	Viscosité cinématique	$[L^2\ T^{-1}]$
ξ	$x\ /\ \sqrt{t}$	
ρ	Masse volumique	$[M\ L^{-3}]$
σ	Constante de STEFAN-BOLTZMANN	$[M\ L^2\ T^{-3}\ \theta_K^{-4}]$
φ	$\int_{H_s}^{H} \frac{d\ h}{\beta}$	$[M^2\ L^{-2}\ T^{-3}]$
ψ	ρV	$[M\ L^{-2}\ T^{-1/2}]$

Indices :

- $_1$ caractérise le liquide à l'infini
- $_2$ caractérise la vapeur à l'infini
- $_s$ caractérise le liquide à l'interface
- $_{sat}$ caractérise la vapeur à l'interface
- $_L$ caractérise le liquide
- $_V$ caractérise la vapeur

Notations particulières :

$$\Delta [f(x), t] = f(X_{sat}, t) - f(X_s, t)$$

$$\dot{f}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$$

I - INTRODUCTION

L'analyse de l'évolution du système constitué par une goutte d'eau froide rigoureusement sphérique et immobile dans une atmosphère calme de vapeur surchauffée est un problème apparemment simple. En réalité, ce problème non linéaire de transfert de chaleur et de masse implique la résolution d'équations aux dérivées partielles dans un domaine à frontière variable. Les seules solutions analytiques connues possèdent un domaine de validité limité. Elles ne rendent pas compte de l'ensemble du phénomène et, de plus, font appel à un certain nombre d'hypothèses souvent délicates à justifier. Nous citerons les études théoriques de GODSAVE[1], GOLDSMITH et PENNER[2], RANZ[3], SPALDING [4] qui ont étudié l'évaporation d'une goutte à la température de saturation. Ces auteurs ont mis en évidence la réduction du transfert de chaleur par le flux de vapeur relativement froide quittant la surface de la goutte et la formule suivante rend compte de leurs résultats :

$$Nu_e = Nu_T \cdot \frac{Log\ (1 + B')}{B'}$$

Nu_T est le nombre de NUSSELT associé à la goutte en l'absence d'évaporation, Nu_e le nombre de NUSSELT associé à la goutte en présence d'évapo-

ration et B' un paramètre adimensionnel représentant la surchauffe de la vapeur : $B' = \dfrac{H_2 - H_{sat}}{H_{sat} - H_s - \dfrac{q_R}{M}}$.

Pour parvenir à ce résultat, les auteurs cités ont fait un certain nombre d'hypothèses. Ils ont supposé la pression constante dans tout l'espace, les propriétés physiques du fluide indépendantes de la température et une évolution sous forme d'états quasi permanents qui les a conduits à déterminer le nombre de NUSSELT à partir d'une distribution de température identique à celle qui existerait si le rayon de la goutte restait constant. Ces hypothèses ont permis d'obtenir une solution analytique dans ce cas simple et il serait vain d'espérer s'en affranchir pour obtenir une solution analytique dans des cas plus complexes de gouttes en mouvement par rapport à la vapeur. Or, nous nous intéressons aux solutions analytiques concernant l'évolution de gouttes isolées afin d'en utiliser éventuellement les résultats dans l'étude du comportement d'un ensemble de gouttes.

Avant d'utiliser ces hypothèses pour une étude ultérieure, nous allons en contrôler avec soin la validité. D'une manière analogue à celle utilisée par DUDA et VRENTAS [5] en ce qui concerne la dissolution d'une sphère isolée, nous allons examiner les possibilités (et les impossibilités) de déterminer des solutions analytiques applicables à l'analyse de l'évolution instationnaire d'une goutte immobile. Nous étendrons notre analyse à des problèmes analogues de transfert de chaleur et de masse caractérisés par différentes géométries d'interface. Nous examinerons successivement les possibilités de déterminer des solutions affines et des solutions indépendantes du temps. Nous en déduirons un critère de comportement d'une goutte d'eau froide immobile dans une atmosphère de vapeur surchauffée.

Un traitement numérique de l'ensemble du problème complètera les solutions analytiques et fournira des estimations de caractéristiques de phénomènes fondamentalement instationnaires intervenant dans la période de réchauffement de la goutte au début de son évolution. Il nous permettra d'évaluer l'influence de la surchauffe sur la condensation de la vapeur sur la goutte et l'importance de la prise en compte des variations des propriétés physiques avec la température tout au long de l'évolution.

Ce traitement numérique permettra de juger de la validité des solutions analytiques obtenues et les hypothèses qui ont conduit à de telles solutions pourront alors être employées dans l'analyse du cas plus complexe du comportement d'une goutte en mouvement par rapport à la vapeur.

II - POSITION DU PROBLEME

A - CADRE DE L'ETUDE

Considérons une goutte sphérique de rayon R et de température uniforme T_1 placée à l'instant initial dans une atmosphère infinie et calme de vapeur surchauffée dont les conditions à l'infini, pression P_2, température T_2 sont maintenues constantes. Dans un repère ayant pour origine le centre de la goutte, nous étudions l'évolution de ce système et, en particulier, la modification au cours du temps des profils de température et la variation du rayon de la goutte. Nous faisons les hypothèses suivantes:

- Hypothèse 1 : A l'interface règnent des conditions d'équilibre thermodynamique. La pression P_s, la température T_s et le rayon de la goutte sont reliés par la relation de KELVIN HELMOTZ qui pour des gouttes de rayon supérieur à 0.1 micron peut être remplacée par la relation $P_s = \pi(T_s)$ où $\pi(T_s)$ est la tension de vapeur saturante à la température T_s.

- Hypothèse 2 : L'effet de la pesanteur est négligeable. Ceci a été mis en évidence par les expériences de HOFFMAN et GAUVIN [6] qui ont montré l'indépendance du nombre de NUSSELT et du nombre de GRASHOF associés à une goutte s'évaporant dans une atmosphére calme de vapeur surchauffée.

- Hypothèse 3 : Le flux d'énergie q_R transmise par rayonnement est entièrement utilisé dans le changement de phase et la vapeur entourant la goutte se comporte comme un milieu non absorbant. ROSS, dans une étude complète de ce point [7] a montré que l'on pouvait raisonnablement utiliser l'expression suivante :

$$q_R = a_p \cdot \sigma (T_w^4 - T_s^4) \times 4\pi R^2$$

dans l'écriture des conditions à l'interface intervenant dans le problème d'évaporation de gouttes d'eau de rayon R dans une enceinte dont les parois sont à la température $T_w > T_s$. q_R est le flux d'énergie transmise par rayonnement reçu par le liquide.

Dans le cadre de l'hypothèse 2, notre problème possède une symétrie sphérique et, à tout instant, pression, température et vitesse ne dépendent que de la distance au centre de la goutte. Nous pouvons inclure cette analyse dans le cadre plus général de l'étude du phénomène de transfert de chaleur et de masse à conditions aux frontières stationnaires dans lesquels n'intervient qu'une seule variable d'espace. Chaque problème est caractérisé par la géométrie de l'interface et nous traiterons simultanément les trois cas de l'interface plan (cas 1), cylindrique (cas 2) et sphérique (cas 3).

B - ETABLISSEMENT DES EQUATIONS

Nous écrivons les équations de conservation de masse d'impulsion et d'énergie relatives aux systèmes étudiés. Suivant les valeurs de l'exposant N , nous sommes en présence de l'un des trois cas envisagés et l'interface est plan, cylindrique ou sphérique.

$$\text{①}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{x^N}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[x^N \rho U\right] = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} - \nu\left[\dfrac{1}{x^N}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^N \dfrac{\partial U}{\partial x}\right) - N\dfrac{U}{x^2}\right] = 0 \\[2ex] \rho\left[\dfrac{\partial H}{\partial t} + U\dfrac{\partial H}{\partial x}\right] - \dfrac{1}{x^N}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[x^N \lambda \dfrac{\partial H}{\partial x}\right] - 2\eta\left[\dfrac{\delta U}{\delta x}\right]^2 - \dfrac{dp}{dt} = 0 \end{cases}$$

- N = 0 correspond à un interface plan (cas 1). Le repère est lié à l'interface et x représente la distance du point courant au plan de l'interface.

- N = 1 correspond à un interface cylindrique (cas 2). Le repère est lié à l'axe du cylindre et x représente la distance du point courant à cet axe.

- N = 2 correspond à un interface sphérique (cas 3). Le repère est lié au centre de la sphère et x représente la distance du point courant à ce centre.

- L'interface est représenté par $x = X(t)$. Dans le cas 1, $X(t) = 0$.

Le système (1) doit être complété par les conditions aux frontières et les conditions initiales suivantes :

	Conditions aux frontières		Conditions initiales
Cas 1	Lim. $H = H_1$ $x \longrightarrow -\infty$	Lim. $H = H_2$ $x \longrightarrow +\infty$	$H(x, 0) = H_1$ $x < X(t)$ $H(x, 0) = H_2$ $x > X(t)$
Cas 2	$\frac{\partial H}{\partial x}(0,t) = 0$	Lim. $P = P_2$ $x \longrightarrow +\infty$	$P(x, 0) = P_2$
Cas 3			

Dans le cadre des hypothèses 2 et 3, les conditions à l'interface s'écrivent en notant $\Delta\left[f\right]$ le saut de discontinuité d'une fonction f au passage de l'interface ($\Delta\left[f\right] = f(X_{sat}) - f(X_s)$) :

$$\begin{cases} \Delta\left[\rho(U - \dot{X})\right] = 0 \qquad H(X_s) = H_s(P_s) \qquad H(X_{sat}) = H_{sat}(P_s) \\ \Delta\left[H\right] \rho(U - \dot{X}) = \Delta\left[\lambda \frac{\partial H}{\partial x}\right] + q_R \\ \Delta\left[U\right] \rho(U - \dot{X}) = \Delta\left[- P + \eta \frac{\partial U}{\partial x} \right] - 2 A \Gamma \end{cases}$$

A représente la constante de tension superficielle et Γ , la courbure de la surface. La dernière condition relie la discontinuité de pression aux caractéristiques dynamiques des deux phases.

C - REDUCTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

Le système (1) complété par les conditions aux frontières initiales, et à l'interface n'est pas susceptible d'une résolution analytique. Par ailleurs, un traitement numérique utilisant une méthode aux différences finies serait extrêmement lourd. Il faudrait résoudre l'équation (1, 2) pour obtenir la valeur de la pression dans tout l'espace et en particulier à l'interface où la connaissance de la pression P_s est nécessaire pour préciser les conditions de transfert permettant une résolution complète du système (1) . Pour éviter cette résolution, nous ferons l'hypothèse suivante:

- Hypothèse 4 : Nous supposons que les vitesses mises en jeu sont suffisamment faibles pour que les effets d'inertie et visqueux soient négligeables. En conséquence, nous négligeons la dissipation visqueuse dans l'équation d'énergie et considérons dans tout l'espace occupé par la vapeur la pression comme étant constante et égale à P_2. L'équation (①,2) est alors totalement disjointe des deux autres et, abandonnant la connaissance du champ de pression, nous réduisons le système ① à la forme suivante.

$$② \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{x^N} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[x^N \rho U\right] = 0 \\ \rho\left[\dfrac{\partial H}{\partial t} + U \dfrac{\partial H}{\partial x}\right] - \dfrac{1}{x^N} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[x^N \lambda \dfrac{\partial H}{\partial x}\right] = 0 \end{cases}$$

avec :

	Conditions aux frontières		Conditions initiales	Conditions à l'interface
Cas 1	Lim. $H=H_1$ $x \to -\infty$		$H(x,0)=H_1$ $x < X(t)$	$\Delta[\rho(U-\dot{X})]=0$
		Lim. $H=H_2$ $x \to +\infty$	$H(x,0)=H_2$ $x > X(t)$	$[\rho(U-\dot{X})]\,\Delta H = \Delta\left[\lambda \dfrac{\partial H}{\partial x}\right] + q_R$
Cas 2	$\dfrac{\partial H}{\partial x}(0,t)=0$			
Cas 3				$H[X_s,t] = H_s$ $H[X_{sat},t] = H_{sat}$

L'hypothèse 4 ayant permis la réduction du système ① au système ②, système de deux équations aux dérivées partielles couplées, sera justifiée à posteriori à partir des solutions obtenues. (Voir Annexe A I).

III - RESOLUTION

A - RECHERCHE DE SOLUTIONS ANALYTIQUES

Avant d'entreprendre une résolution numérique complète du système (2) , nous explorerons successivement deux voies de recherche. Nous examinerons la possibilité de déterminer une solution affine, c'est-à-dire une solution qui ne dépend de la variable d'espace et du temps que par l'intermédiaire d'une fonction de ces deux variables. Nous rechercherons aussi des solutions indépendantes du temps qui sont d'ailleurs des solutions affines particulières et examinerons la légitimité de leur application à chaque instant en vue de déterminer l'évolution du système physique (hypothèse de l'état quasi permanent).

1 - Recherche des solutions affines

Nous abandonnons momentanément les conditions initiales du système (2) et recherchons une solution affine en utilisant une méthode résultant de la théorie des groupes et exposée par HANSEN [8] . Nous cherchons un groupe de transformations à un paramètre qui laisse invariant le système (2) pourvu de ses conditions aux frontières et à l'interface. Ce groupe est défini par :

$$\tilde{x} = \alpha^{a_x} x,\ \tilde{t} = \alpha^{a_t} t,\ \tilde{U} = \alpha^{a_u} U,\ \tilde{H} = \alpha^{a_H} H,\ \tilde{X} = \alpha^{a_X} X,\ \tilde{\rho} = \alpha^{a_\rho} \rho,\ \tilde{\lambda} = \alpha^{a_\lambda} \lambda \ .$$

Nous supposons que les variations des propriétés physiques peuvent être représentées par des lois en puissance de l'enthalpie $\rho \sim H^{N\rho}$ et $\lambda \sim H^{N\lambda}$. Il est à noter que N_ρ et N_λ sont des données du problème et nous avons immédiatement $a_\rho = a_H \cdot N_\rho$ et $a_\lambda = a_H \cdot N_\lambda$. L'invariance du système (2) pourvu de ses conditions aux frontières et à l'interface conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} a_u - a_x + a_t = 0 \\ a_u + a_x + a_H [N_\rho - N_\lambda] = 0 \\ a_u + a_t - a_x = 0 \\ a_u + a_H [N_\rho - N_\lambda - 1] + a_x = 0 \end{cases}$$

Ce système linéaire a pour solution : $a_H = 0$, $a_x = a_X = 1$, $a_u = -1$, $a_t = 2$, qui caractérise le groupe G_α répondant à la question. L'existence d'un tel groupe assure la possibilité de transformer le système (2) en un sys-

tème d'équations différentielles en prenant comme nouvelles fonctions et variable des invariants du groupe G_α . Les fonctions H et $V = U\sqrt{t}$ ainsi que la variable $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$ répondent à la question. La fonction de t : $\frac{X(t)}{\sqrt{t}}$ est un invariant du groupe G_α . C'est une fonction de la variable ξ qui ne peut être qu'une constante $\frac{X}{\sqrt{t}} = \Xi \geqslant 0$.

Le changement de variables et de fonctions défini ci-dessus conduit au système d'équations différentielles :

$$③ \quad \begin{cases} -\frac{\xi}{2}\rho' + \frac{1}{\xi^N}\left[\xi^N \rho V\right]' = 0 \\ (V - \frac{\xi}{2})\ \rho H' - \frac{1}{\xi^N}(\lambda \xi^N H') = 0 \end{cases}$$

avec :

	Conditions aux frontières		Conditions à l'interface
Cas 1	Lim. $H = H_1$, $\xi \longrightarrow -\infty$	Lim. $H = H_2$, $\xi \longrightarrow +\infty$	$\Delta\left[\rho(V - \frac{\Xi}{2})\right] = 0$
			$\rho(V - \frac{\Xi}{2})\Delta H = \Delta(\lambda H') + q_R$
Cas 2	$H'(0) = 0$		$H(\Xi_s) = H_s$
Cas 3			$H(\Xi_{sat}) = H_{sat}$

La deuxième équation du système ③ s'écrit :

$$\left[(V - \frac{\xi}{2})\frac{\rho}{\lambda} - \frac{N}{\xi}\right]\lambda H' - (\lambda H')' = 0$$

d'où en intégrant :

$$\lambda H' = \frac{A}{\xi^N}\, e^{\int_{\Xi}^{\xi} \frac{\rho}{\lambda}(V - \frac{z}{2})dz} \qquad \text{(A est une constante).}$$

Cette expression est compatible quelle que soit la valeur de A avec les conditions aux frontières dans le cas (1). Dans les cas (2) et (3), il

n'y a compatibilité avec la condition $H'(0) = 0$ que si A est nul, ce qui entraîne que l'enthalpie du liquide reste constante et égale à H_s. Les conditions à l'interface entraînent immédiatement $\frac{dH}{d\xi}[\Xi_+] < 0$, ce qui est impossible car, dans le domaine occupé par la vapeur, l'enthalpie est bornée inférieurement par la valeur qu'elle prend à l'interface.

Il résulte de cette étude que, dans les cas de l'interface cylindrique et sphérique, il n'existe pas de solution affine du système (2) muni de ses conditions aux frontières et à l'interface. Une telle impossibilité n'existe pas dans le cas de l'interface plan ; les conditions initiales sont automatiquement satisfaites et l'existence d'une solution affine est assurée. Nous allons étudier cette solution en détails car nous l'utiliserons lors de la résolution numérique complète du cas (3) de l'interface sphérique .

2 - Etude de la solution affine dans le cas de l'interface plan

a) Détermination de la solution :

Nous allons résoudre (3')

$$\begin{cases} -\frac{\xi}{2}\rho' + (\rho V)' = 0 \\ (V - \frac{\xi}{2})\rho H' - (\lambda H')' = 0 \end{cases}$$

avec :

Conditions aux frontières	Conditions à l'interface
Lim. $H = H_1$, $\xi \longrightarrow -\infty$	$H[0_s] = H_s$ $\quad \Delta[\rho V] = 0$
Lim. $H = H_2$, $\xi \longrightarrow +\infty$	$H[0_{sat}] = H_{sat}$ $\quad \rho V \Delta[H] = \Delta[\lambda H'] + q_R$

Posons $\beta = \frac{1}{\rho\lambda} = \frac{C_p}{\rho K}$ et effectuons le changement de variable et de fonction défini par :

$$\eta = \int_0^{\xi} \rho(s)\, ds \qquad \varphi(\eta) = \int_{H_s}^{H} \frac{dh}{\beta} \qquad \psi(\eta) = \rho V$$

Le système (3') devient :

$$④ \quad \begin{cases} \psi(\eta) = \psi(0) - \frac{\eta}{2} + \frac{\rho}{2} \int_0^{\eta} \frac{ds}{\rho} \\ \beta(\psi(0) - \frac{\eta}{2})\,\varphi' - \varphi'' = 0 \end{cases}$$

avec :

Conditions aux frontières	Conditions à l'interface
$\lim_{\eta \to \infty} \varphi = \varphi_2 = \int_{H_s}^{H_2} \frac{dh}{\beta}$	$\varphi[0_s] = 0$
$\lim_{\eta \to -\infty} \varphi = \varphi_1 = \int_{H_s}^{H_1} \frac{dh}{\beta}$	$\psi(0) = \frac{\Delta[\varphi']}{\Delta[H]} + q_R$ $\Delta[\varphi] = \Delta\left[\frac{H}{\beta}\right]$

Il apparaît [9] que la fonction $\varphi(\eta)$ ainsi que les quantités qui en dérivent (en particulier $\psi(0)$) ne dépendent des propriétés physiques des deux phases que par l'intermédiaire de la fonction $\beta(H) = \frac{C_p}{\rho K}$. Si nous considérons $\beta(H)$ comme constant et ceci est possible dans le cas de l'eau dans des conditions suffisamment éloignées des conditions critiques (voir figure 1), il est aisé d'achever l'intégration de ④ . On trouve :

$$⑤ \quad \begin{cases} \eta > 0 & \dfrac{H(\eta) - H_2}{H_{sat} - H_2} = \dfrac{1.+\mathrm{erf}\left[\sqrt{\beta_2}(\psi_0 - \frac{\eta}{2})\right]}{1.+\mathrm{erf}\ \sqrt{\beta_1}\ \psi_0} \\ \eta < 0 & \dfrac{H(\eta) - H_1}{H_s - H_1} = \dfrac{1.-\mathrm{erf}\left[\sqrt{\beta_1}(\psi_0 - \frac{\eta}{2})\right]}{1.-\mathrm{erf}\ (\sqrt{\beta_1}\ \psi_0)} \end{cases}$$

avec : $\eta < 0 \qquad \beta(\eta) = \beta_1$

$\eta > 0 \qquad \beta(\eta) = \beta_2$

$\psi_0 = \psi(0)$

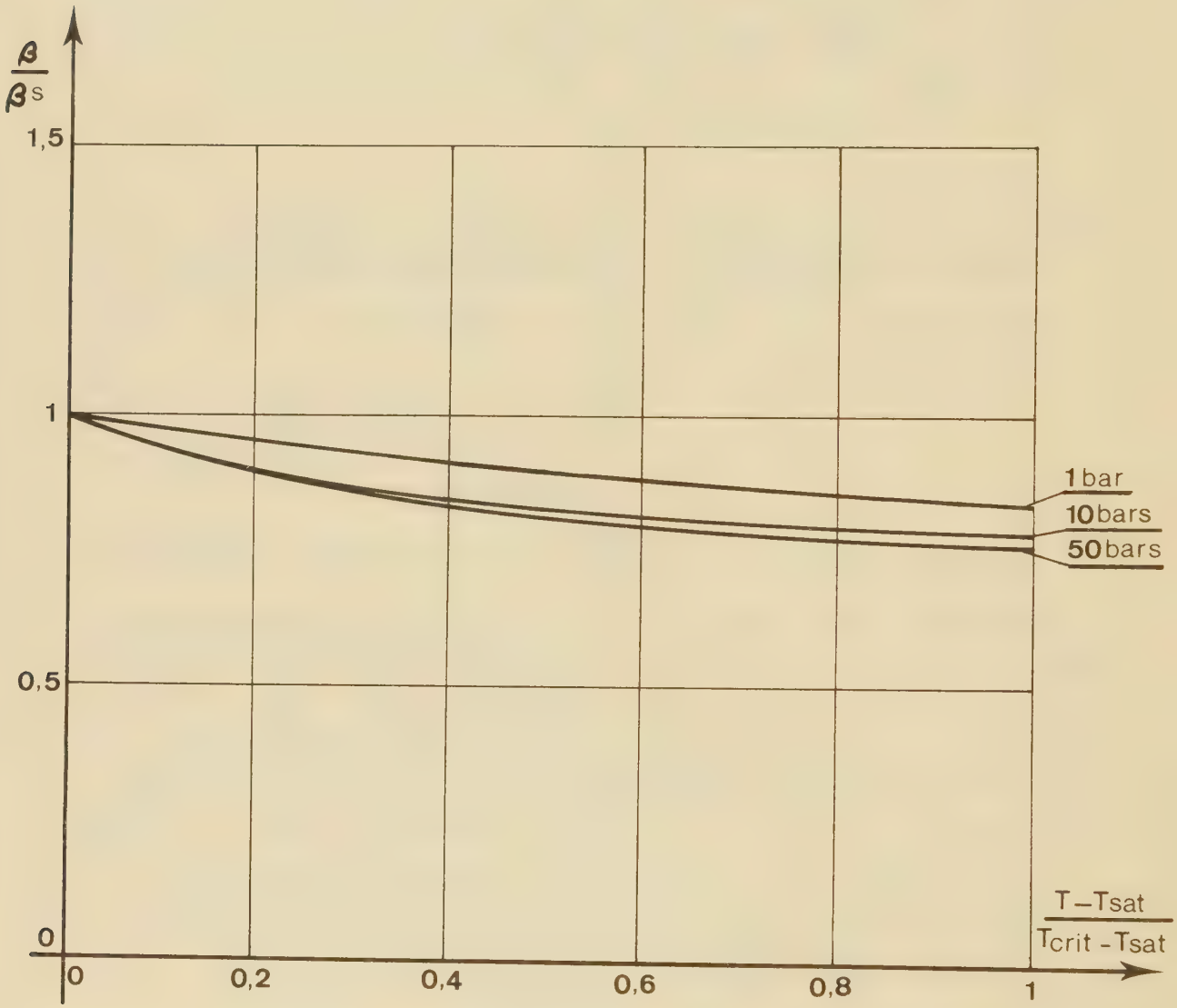


Fig 1: VARIATION DES PROPRIETES PHYSIQUES DE LA VAPEUR AVEC LA TEMPERATURE

On peut alors calculer ψ_0 , débit masse à l'instant unité à travers l'interface en utilisant les conditions à l'interface ψ_0 est solution de l'équation :

$$⑥ \quad \psi_0 - \frac{\sigma_R}{\Delta[H]} + \frac{B_1}{\sqrt{\pi\beta_1}} \frac{e^{-\beta_1 \psi_0^2}}{\operatorname{erf}\left[\sqrt{\beta_1}\,\psi_0\right] - 1} - \frac{B_2}{\sqrt{\pi\beta_2}} \frac{e^{-\beta_2 \psi_0^2}}{1+\operatorname{erf}\left[\sqrt{\beta_1}\,\psi_0\right]} = 0$$

où : $B_1 = \frac{H_1 - H_s}{H}$ et $B_2 = \frac{H_2 - H_{sat}}{H}$

b) Débit massique : critère de comportement

Nous allons étudier le débit masse dans le cas où le flux d'énergie rayonnée q_R est nulle. L'équation ② est de la forme :

$$W = B_1 F(W) + B_2 G(W, \Upsilon)$$

où $W = \sqrt{\beta_1}\,\psi_0$, $\Upsilon = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}$.

Dans le plan (B_1 , B_2) cette équation représente une famille de droites dépendant de deux paramètres W et Υ . Pour une valeur fixée de Υ , ces droites enveloppent une courbe paramétrée par les valeurs de W.

Cette famille d'enveloppes (C) à un paramètre Υ est représentée sur la figure 2 et est indépendante du corps étudié. Ces courbes présentent toutes un point de rebroussement et admettent $B_1 = 1$ et $B_2 = -1$ comme asymptotes. Le lieu des points correspondant à la valeur zéro de W est le segment de droite joignant $(0, -\frac{\pi}{2})$ à $(\frac{\pi}{2} , 0)$.

Pour un corps donné subissant un changement de phase à travers un interface plan, nous déterminons à partir des températures à l'infini des deux phases un couple de valeurs (B_1 , B_2). Le corps étudié est caractérisé par une valeur du paramètre $\Upsilon = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}$ qui fixe une courbe C_0 de la famille (C). W_0 étant le paramètre du point de contact de la tangente à C_0 menée par le point (B_1 , B_2), le débit masse à l'instant unité vaut $\psi_0 = \frac{W_0}{\sqrt{\beta_1}}$.

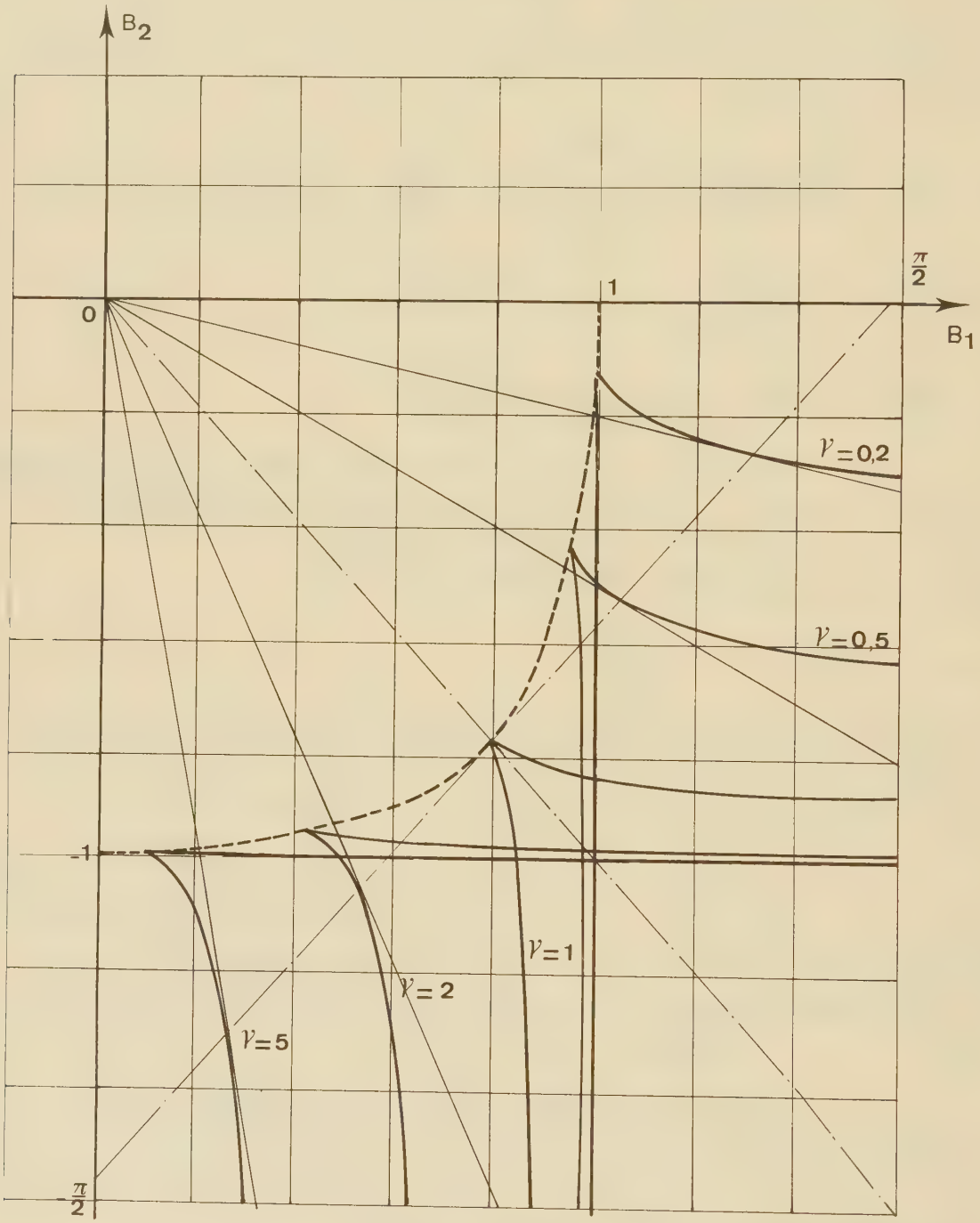


Fig 2 : DETERMINATION DU DEBIT MASSIQUE

Au voisinage de $\psi_0 = 0$, l'expression (2) est équivalente à :

$$\psi_0 = \frac{B_1}{\sqrt{\pi \beta_1}} + \frac{B_2}{\sqrt{\pi \beta_2}}$$

D'où le critère de comportement :

(7)

Si $-\frac{B_2}{B_1} > \gamma$, il y a évaporation ($\psi_0 > 0$)

Si $-\frac{B_2}{B_1} < \gamma$, il y a condensation ($\psi_0 < 0$)

Pour de l'eau à 20° et de la vapeur à 200° à la pression atmosphérique, $\gamma = 150$, et $-\frac{B_2}{B_1} = 0.7$; il y a condensation de la vapeur (figure 3). C'est le cas le plus fréquent.

Dans le cas d'un interface plan, il existe une solution affine (5) de notre problème que nous avons déterminée et dont nous avons déduit un critère simple de comportement (7) concernant le changement de phase à travers un interface plan.

3 - Recherche des solutions indépendantes du temps

Le problème que nous étudions est fondamentalement instationnaire et la position de l'interface, les distributions de température et de vitesse sont des fonctions du temps. Nous allons cependant examiner la solution du problème stationnaire formulé à partir des équations du système (2) muni des conditions aux frontières et à l'interface en supposant que l'enthalpie H , la vitesse U, et la position de l'interface

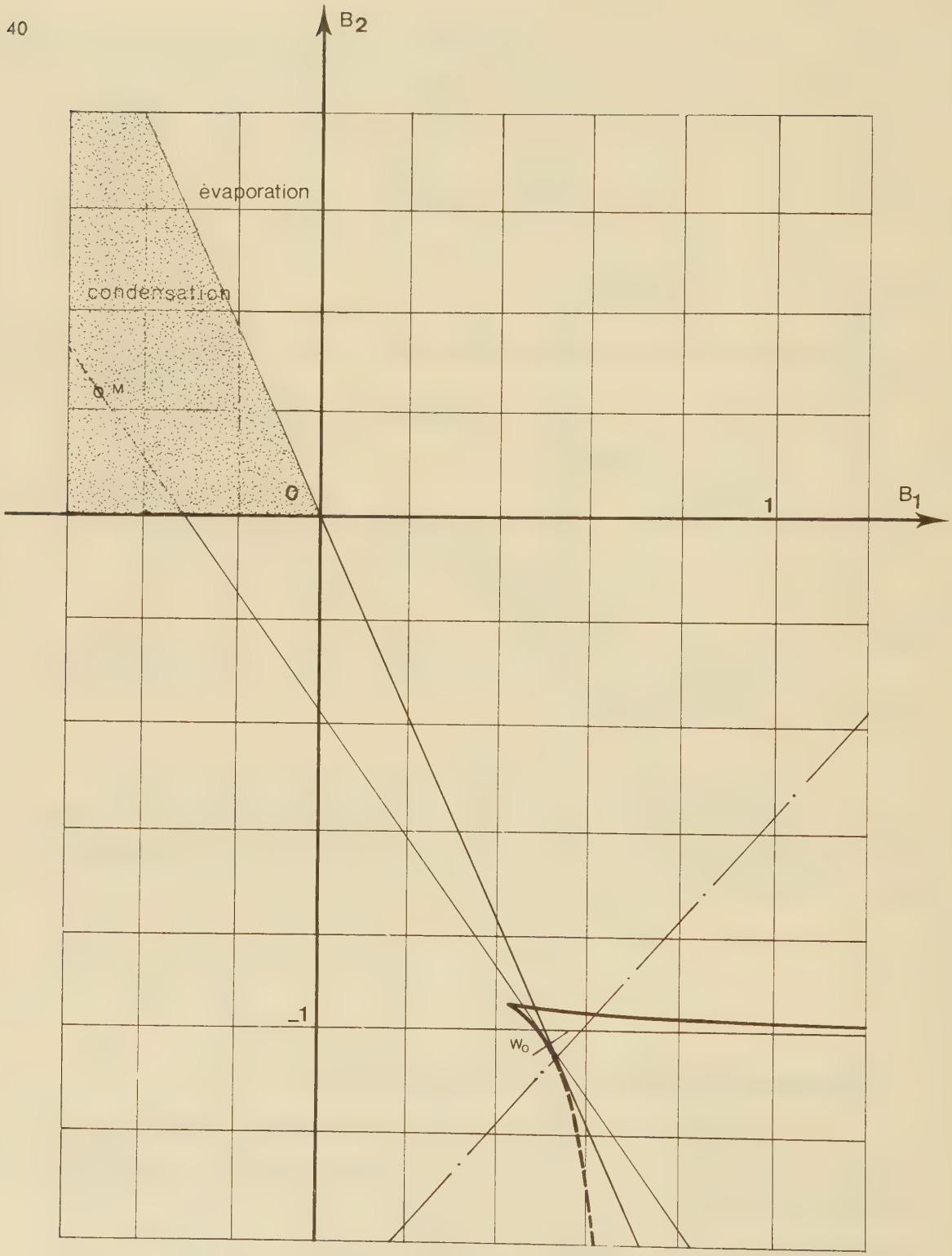


Fig 3 : CRITERE DE COMPORTEMENT

X ne dépendent pas du temps. Si nous supposons que la solution de ce nouveau problème est, à chaque instant, applicable au problème instationnaire qui nous intéresse, nous pourrons déduire de la valeur du débit massique la variation de la position de l'interface au cours du temps. Une telle hypothèse constitue une hypothèse d'état quasi permanent et nous examinerons par la suite sa validité. Une solution établie dans cette hypothèse rend compte, en toute rigueur, d'un phénomène de transfert de chaleur et de masse à travers la surface d'un milieu poreux imbibé de liquide et alimenté à l'infini (cas 1) ou en son centre (cas 2 et cas 3). Les équations s'écrivent en intégrant une première fois :

(8)

	$x < X$	$x > X$
Cas 1	$\rho U = \dot{M}_L$ $\rho U H - \lambda \frac{dH}{dx} = \dot{E}_L$	$\rho U = \dot{M}_V$ $\rho U H - \lambda \frac{dH}{dx} = \dot{E}_V$
Cas 2	$\rho U = \frac{\dot{M}_L}{2\pi x}$ $\rho U H - \lambda \frac{dH}{dx} = \frac{\dot{E}_L}{2\pi x}$	$\rho U = \frac{\dot{M}_V}{2\pi x}$ $\rho U H - \lambda \frac{dH}{dx} = \frac{\dot{E}_V}{2\pi x}$
Cas 3	$\rho U = \frac{\dot{M}_L}{4\pi x^2}$ $\rho U H - \lambda \frac{dH}{dx} = \frac{\dot{E}_L}{4\pi x^2}$	$\rho U = \frac{\dot{M}_V}{4\pi x^2}$ $\rho U H - \lambda \frac{dH}{dx} = \frac{\dot{E}_V}{4\pi x^2}$

avec :

	Conditions aux frontières		Conditions à l'interface
	$\lim_{x \to -\infty} H = H_1$	$\lim_{x \to +\infty} H = H_2$	$\dot{M}_L = \dot{M}_V = M$ $\dot{E}_L - \dot{E}_V = + q_R$
Cas 2 Cas 3	$\frac{\partial H}{\partial x}(0) = 0$		$H(X-) = H_s$ $H(X+) = H_{sat}$

$\dot{M}_L$, $\dot{M}_V$, $\dot{E}_L$, $\dot{E}_V$ sont des constantes représentant les flux de masse et d'énergie respectivement dans le liquide et la vapeur à travers une surface parallèle à l'interface de surface unité dans le cas plan de hauteur unité dans le cas cylindrique. q_R est le flux total d'énergie rayonnée traversant l'interface.

Les changements de variables $y = x$ (cas 1), $y = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{x}{X}\right)$ (cas 2), $y = -\frac{1}{4\pi x}$ (cas 3) permettent de ramener à une forme unique les trois équations d'énergie intervenant dans (8) .

	$x < X$	$x > X$
(9)	(1) $\dot{M}_L H - \lambda \frac{dH}{dy} = \dot{E}_L$	(2) $\dot{M}_V H - \lambda \frac{dH}{dy} = \dot{E}_V$

avec les mêmes conditions aux frontières et à l'interface qu'en (8) . La différence fondamentale entre les cas 1 et 2 et le cas 3 est que l'infini côté vapeur est représenté pour les premiers par $y = +\infty$ et pour le dernier par $y = 0$.

Il est facile de voir que l'on ne saurait satisfaire simultanément à toutes les conditions aux frontières si on a à la fois $H_1 \neq H_s$ et $H_2 \neq H_{sat}$. Nous allons étudier le cas où le liquide est entièrement à saturation $(H_1 = H_s)$. Il n'y a pas de transfert thermique dans la phase liquide et le phénomène est contrôlé par les transferts de chaleur et de masse dans la vapeur. Dans ce cas, $\dot{E}_L = \dot{M} H_s$.

Remarque : L'analyse qui va suivre est applicable à l'étude de films liquides d'épaisseur e constante sur des surfaces planes cylindriques ou sphériques à travers lesquelles est imposé un flux de chaleur $\dot{E}_W$. Dans ce cas, $\dot{E}_L = \dot{M} H_s - \dot{E}$ où $\dot{E}$, flux de chaleur traversant l'interface côté liquide, est fonction de $\dot{E}_W$ et de e . Il suffit, pour appliquer à ce problème les conclusions de l'étude suivante, de remplacer q_R par $q_R - \dot{E}$ dans les équations

4 - Etude des solutions indépendantes du temps : discussion [10]

a) Interface plan, interface cylindrique :

La solution de (⑨,2) s'écrit : $y = \frac{1}{\dot{M}} \int_{H_{sat}}^{H} \lambda \frac{d\,h}{h - (H_s + \frac{q_R}{\dot{M}})}$.

A une valeur infinie de y doit correspondre une intégrale divergeante donc $H_2 = H_s + \frac{q_R}{\dot{M}}$. La double inégalité $H_{sat} \leqslant h \leqslant H_2$ entraîne $\frac{q_R}{\dot{M}} > 0$ et $y\,\dot{M} < 0$, donc $y\,q_R < 0$. Comme y est strictement positif, on en conclut que q_R est strictement négatif, donc $\dot{M}$ est négatif. Dans le cas de l'interface plan et de l'interface cylindrique, la seule solution indépendante du temps possible est une solution entraînant une condensation de la vapeur. Le débit massique condensé a pour valeur :

⑩ $$\boxed{\dot{M} = \frac{+\,q_R}{H_2 - H_s}}$$

b) Interface sphérique :

La solution de (⑨,2) s'écrit: $y = \frac{1}{-\dot{M}} \int_{H}^{H_2} \lambda \frac{d\,h}{h - (H_s + \frac{q_R}{\dot{M}})}$

A priori, tous les cas sont possibles et la relation entre $Y = -\frac{1}{4\pi X}$, M, H_s , H_2 , H_{sat} et q_R s'écrit :

$$Y = -\frac{1}{\dot{M}} \int_{H_{sat}}^{H} \lambda \frac{d\,h}{h - (H_s + \frac{q_R}{\dot{M}})}$$

Pour qu'une solution stationnaire soit possible, l'intégrale du deuxième membre doit être convergente. Une discussion de la solution est résumée dans le tableau suivant.

$q_R < 0$		$q_R \geqslant 0$
$\lvert Y \rvert > \lambda \frac{H_L - H_{sat}}{\lvert q_R \rvert}$	$\lvert Y \rvert < \lambda \frac{H_2 - H_{sat}}{\lvert q_R \rvert}$	$\dot{M} > \frac{+\,q_R}{H_{sat} - H_s} > \frac{+\,q_R}{H_2 - H_s}$
$\frac{+\,q_R}{H_{sat} - H_s} < \frac{+\,q_R}{H_2 - H_s} < \dot{M} < 0$	$\dot{M} > 0$	
CONDENSATION	EVAPORATION	EVAPORATION

c) Evolution du système extérieur :

Considérons le système constitué par la vapeur extérieure à une "couche limite" voisine de l'interface dans laquelle H est différent de H_2 . L'équation d'évolution de ce système s'écrit (en notant m sa masse, S son entropie, T sa température).

$$m T \frac{ds}{dt} = \Phi_s$$

où Φ_s est l'intégrale à l'infini de $-\frac{\lambda dH}{dy}$, flux de chaleur transmis par conduction. Le flux d'énergie $-\dot{M} H_2$ n'affecte pas l'entropie du système extérieur. La relation (⑨, 2) et les conditions à l'interface de ⑧ montrent immédiatement que :

$$\Phi_s = - q_R - \dot{M} (H_2 - H_s)$$

et il résulte des discussions précédentes que :

Dans les cas plan et cylindrique, $\Phi_s = 0$. La vapeur extérieure évolue de façon isentropique. Le plan et le cylindre sont des systèmes ouverts ; l'énergie nécessaire à la transformation $H_2 \rightleftharpoons H_s$ n'est pas prise à la vapeur environnante et un simple bilan ⑩ permet de calculer le débit massique. Dans le cas sphérique, l'entropie de la vapeur extérieure diminue qu'il y ait condensation ou évaporation. La sphère est un système clos ; l'énergie nécessaire à la transformation $H_2 \rightleftharpoons H_s$ est empruntée à la vapeur extérieure et la structure de la couche de vapeur voisine de l'interface détermine le débit massique.

5 - Etude du cas de l'interface sphérique

L'hypothèse de l'état quasi permanent a été formulée en (III, A- 3-) ; nous allons examiner les conclusions qu'elle entraîne pour le cas de l'interface sphérique.

a) Influence des variations des propriétés physiques de la vapeur :

Dans l'hypothèse d'état quasi permanent, l'évolution de gouttes d'eau de rayon R à température de saturation dans une atmosphère de vapeur surchauffée implique $q_R > 0$. Il résulte de la discussion

précédente qu'il y a évaporation et le débit masse évaporé est solution de l'équation.

$$\text{(11)} \qquad \dot{M} - 4\pi R \int_{H_{sat}}^{H_2} \lambda \frac{d\,h}{h - H_s + \frac{q_R}{\dot{M}}} = 0$$

Si nous supposons λ indépendant de la température, nous pouvons écrire :

$$\text{(12)} \qquad \boxed{\dot{M} = 4\pi R \lambda \quad \text{Log}\,(1 + B')}$$

et obtenir l'expression du nombre de NUSSELT relatif à la goutte :

$$Nu_e = \frac{\dot{M}\,(H_{sat} - H_s) - q_R}{\lambda (H_2 - H_{sat})\quad 2\pi R} = 2\,\frac{\text{Log}\,(1+B')}{B'}$$

Nous retrouvons la relation rappelée dans l'introduction. Le débit massique est proportionnel au rayon de la goutte. Il est aisé d'estimer à partir de l'équation (11) l'influence des variations des propriétés physiques sur le débit évaporé. Pour cela, nous évaluons numériquement l'intégrale de l'équation (11) en tenant compte des variations des propriétés physiques avec la température. Nous avons effectué ce calcul pour différentes valeurs de la pression et de la température à l'infini de la vapeur dans le cas où il n'y a pas d'énergie transmise par rayonnement ($q_R = 0$). Les résultats sont présentés sur la figure 4 . Nous avons tracé la variation en fonction de H_2 du rapport $\dot{M}_{Var} / \dot{M}_{ci}$ où M_{Var} est le débit masse déterminé en tenant compte des variations des propriétés physiques de la vapeur et M_{ci} le débit masse déterminé en évaluant les propriétés physiques à une température caractérisé par l'indice i. Selon que i vaut 1, 2, 3, la température de référence est égale à la température de saturation, la température à l'infini de la vapeur où à leur moyenne arithmétique.

Nous constatons que, pour des conditions suffisamment éloignées des conditions critiques, nous pouvons calculer simplement le débit évaporé à partir de la formule (12) en évaluant les propriétés physiques de la vapeur à une température de référence moyenne arithmétique entre la température de saturation et la température à l'infini de la vapeur.

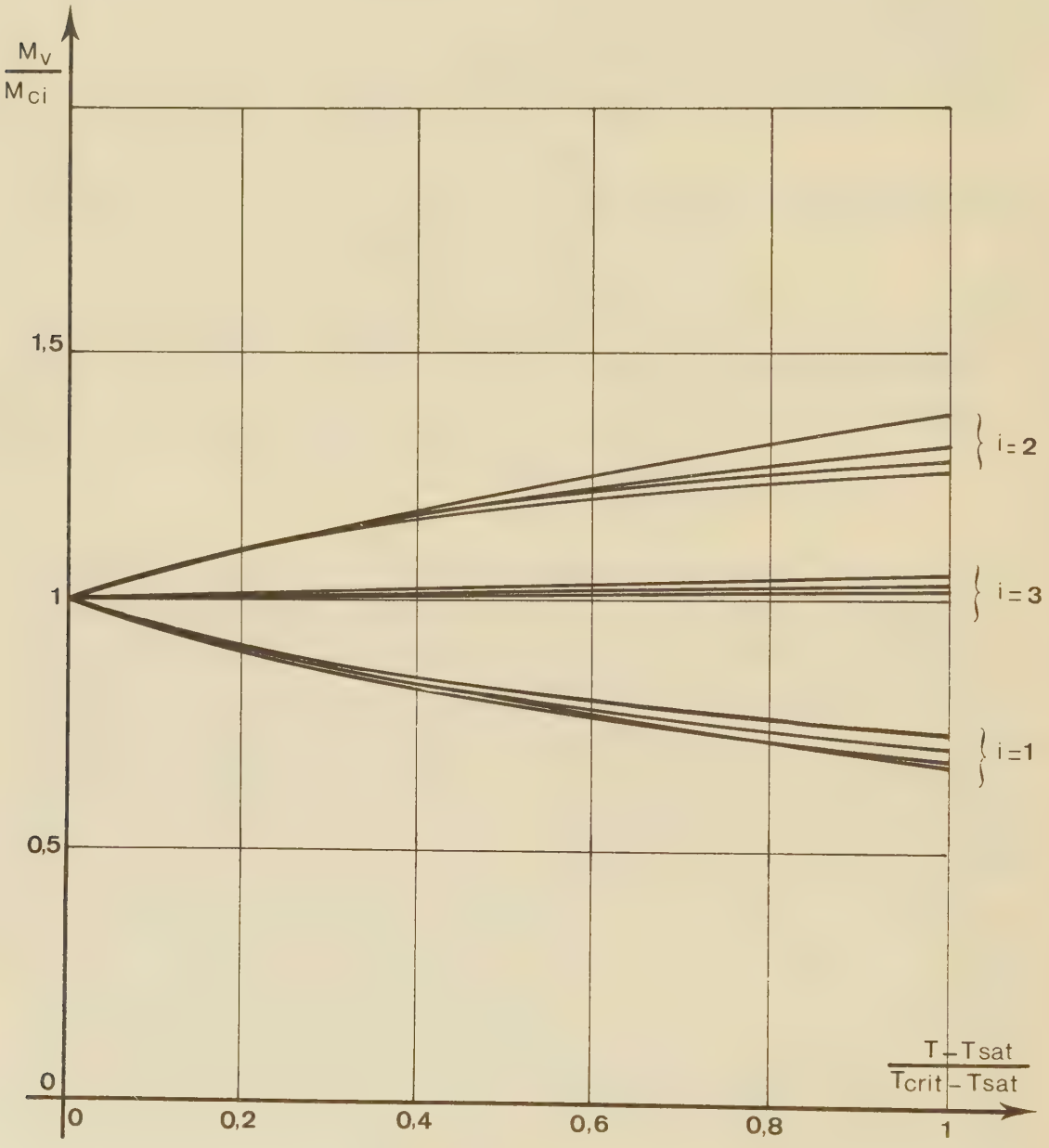


Fig 4 : INFLUENCE DES VARIATIONS DES PROPRIETES PHYSIQUES SUR LE DEBIT MASSIQUE

b) Evolution de la goutte : comparaison avec l'expérience

L'hypothèse de l'état quasi permanent conduit à écrire :

$$\dot{M} + 4 \pi R^2 \rho_L \frac{dR}{dt} = 0$$

et la formule (12) conduit à :

$$\frac{dR^2}{dt} = -\frac{2\lambda}{\rho_L} \text{Log} (1 + B')$$

Si nous négligeons le flux d'énergie transmis par rayonnement devant le flux total d'énergie transmis à la goutte, nous pouvons dire que l'hypothèse de l'état quasi permanent conduit à une décroissance linéaire au cours du temps de la surface de la goutte. Nous avons comparé ces conclusions avec les résultats expérimentaux de HOFFMAN et GAUVIN [6] . Ces auteurs ont étudié dans une atmosphère de vapeur surchauffée à la pression atmosphérique l'évaporation de gouttes d'eau immobiles de différents diamètres pour diverses surchauffes de la vapeur. A partir de mesures optiques de la décroissance du diamètre des gouttes, ils ont calculé le débit massique évaporé. Ils ont bien trouvé une décroissance linéaire au cours du temps du carré du rayon et leurs résultats sont présentés sur la figure 5 où ils sont comparés avec les résultats du calcul mené dans l'hypothèse de l'état quasi permanent. L'accord est satisfaisant mais pour mieux juger de la validité de cette hypothèse, nous avons effectué une étude numérique complète du problème instationnaire.

B - RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME COMPLET

Nous avons effectué cette étude dans le cas où l'interface est sphérique et où l'énergie transmise par rayonnement est nulle.

1 - Traitement des équations

Nous mettons le système (2) sous forme adimensionnelle en prenant comme nouvelles variables et fonctions :

$$\bar{r} = \frac{x}{X(0)}, \quad \bar{R}(t) = \frac{X(t)}{X(0)}, \quad \bar{t} = \frac{t \lambda_s}{\rho_s X(0)^2}, \quad \bar{U} = \frac{U X(0)}{\lambda_s}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_s}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_s}, \quad \bar{H} = \frac{H - H_s}{H_{sat} - H_s}, \quad \bar{K} = \frac{K}{K_s},$$

$$\bar{C}_p = \frac{C_p}{C_{p_s}}$$ où l'indice s caractérise des grandeurs évaluées à l'interface côté liquide. Nous obtenons:

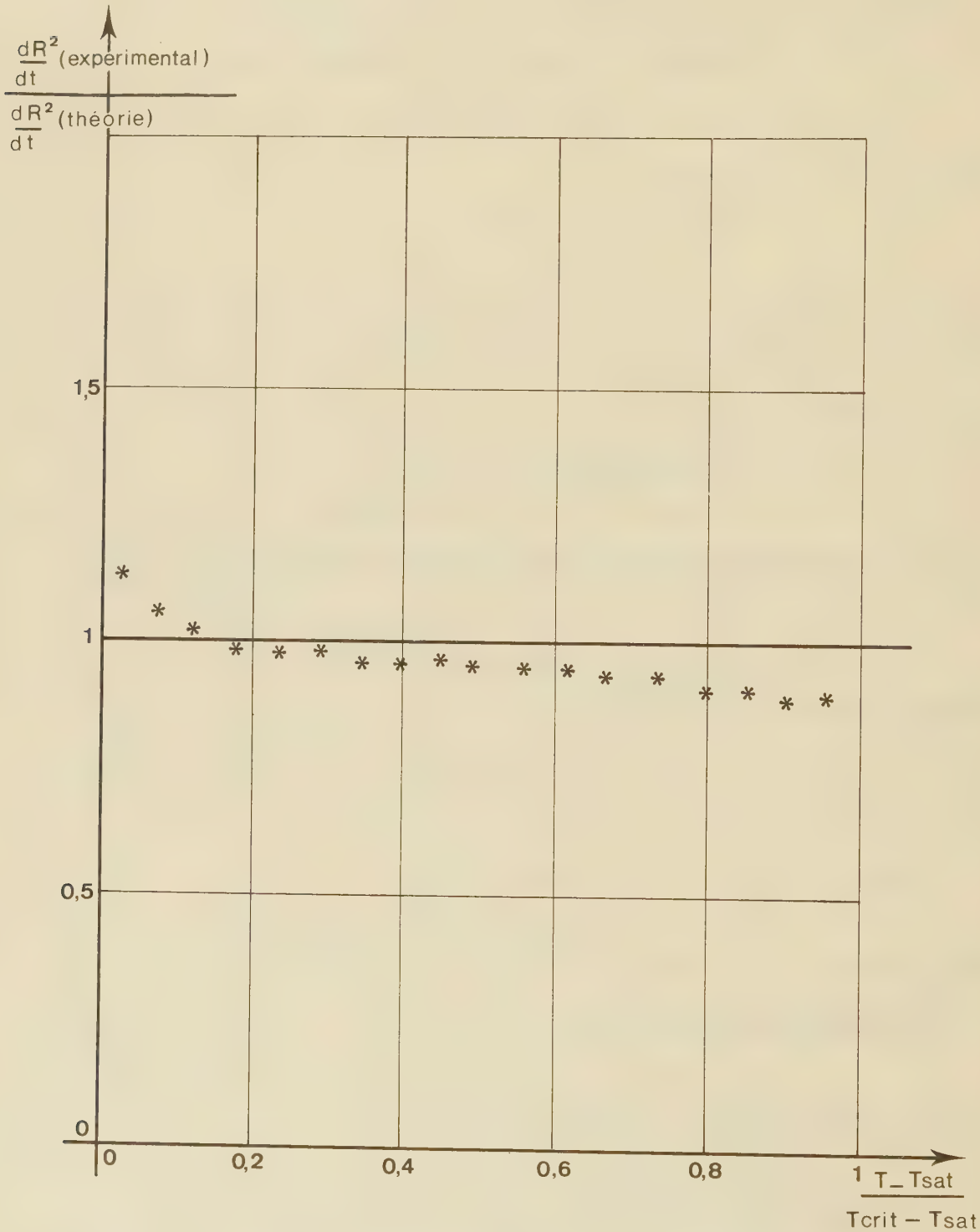


Fig 5 : COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \dfrac{1}{\bar{r}^2}\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\bar{r}^2\ \bar{\rho}\ \bar{U}\right] = 0 \\ \rho\left[\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}} + U\ \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{r}}\right] - \dfrac{1}{\bar{r}^2}\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{r}}\left[\bar{\lambda}\ \bar{r}^2\ \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{r}}\right] = 0 \end{cases}$$

avec :

Conditions aux frontières	Conditions initiales	Conditions à l'interface
$\lim_{\bar{r}\to+\infty} \bar{H} = 1 + B_2$	$\bar{H}(\bar{r},0) = B_1 .\quad \bar{r}<1$	$\Delta\left[\bar{\rho}(\bar{U}-\dot{\bar{R}})\right] = 0$
$\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{r}}(0,\ \bar{t}) = 0$	$\bar{H}(\bar{r},0)=1+B_2 .\quad \bar{r}>1$	$\bar{\rho}(\bar{U}-\dot{\bar{R}})\,\Delta[H] = \Delta\left[\bar{\lambda}\ \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{r}}\right]$
		$\bar{H}\ (\bar{R}-,\bar{t}) = 0$
		$\bar{H}\ (\bar{R}+,\bar{t}) = 1$

Afin de nous affranchir de la difficulté créée par la présence d'une frontière mobile entre les deux phases, nous choisissons une nouvelle variable d'espace $s = \dfrac{\bar{r}}{\bar{R}}$. L'interface est alors représenté par la valeur indépendante du temps $s = 1$. Le système étudié devient :

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \dfrac{\bar{U}-s\ \dot{\bar{R}}}{\bar{R}}\ \dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial s} + \dfrac{\bar{\rho}}{s\bar{R}}\ \dfrac{\partial}{\partial s}\left(s^2\ \bar{U}\right) = 0 \\ \left[\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}} + \dfrac{\bar{U}-s\ \dot{\bar{R}}}{\bar{R}}\ \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial s}\right] - \dfrac{1}{s^2\ \bar{R}^2}\ \dfrac{\partial}{\partial s}\left[s^2\ \bar{\lambda}\ \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial s}\right] = 0 \end{cases}$$

avec :

Conditions aux frontières	Conditions initiales	Conditions à l'interface
$\lim_{s \to \infty} \bar{H} = 1 + B_2$	$\bar{H}(s,0) = B_1 \quad s < 1$	$\Delta[\bar{\rho}(\bar{U} - \dot{\bar{R}})] = 0$
$\frac{\partial \bar{H}}{\partial s}(0, t) = 0$	$\bar{H}(s,0) = 1 + B_2 \quad s > 1$	$\bar{\rho}(\bar{U} - \dot{\bar{R}})\,\Delta[H] = \Delta\left[\frac{\bar{\lambda}}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial s}\right]$
		$\bar{H}[1_-, \bar{t}] = 0 \quad \bar{H}[1_+, \bar{t}] = 1$

En multipliant la première équation par $\bar{\rho} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\rho}}$ et en retranchant la deuxième, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial s} s^2 \bar{U} = - \frac{1}{\bar{\rho} \bar{R} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \rho}} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^2 \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} \right)$$

d'où :

$$\Omega(s) = s^2 \bar{R} \bar{U} = - \int_0^s \frac{1}{\bar{\rho} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\rho}}} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} \right) dz$$

Nous ramenons ainsi le système (14) formé de deux équations aux dérivées partielles à un système plus simple formé d'une seule équation aux dérivées partielles et d'une quadrature que nous résolvons numériquement.

$$(15) \quad \begin{cases} \bar{\rho} \bar{C}_p \left[s^2 \bar{R}^2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + (\Omega - s \bar{R} \dot{\bar{R}}) - 2 s \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial s} \Big] - s^2 \frac{d\bar{K}}{dT} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial s} \right)^2 - s^2 \bar{K} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial s^2} = 0 \\ \Omega = - \int_0^s \frac{1}{\bar{\rho}^2 \bar{C}_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 K \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) dz \end{cases}$$

avec :

Conditions aux frontières	Conditions initiales	Conditions à l'interface
$\lim_{s \to \infty} \overline{T} = \overline{T}_2$	$\overline{T}(s,0) = \overline{T}_1 \quad s < 1$	$\Delta[\overline{\rho}(\Omega - \overline{R}\,\dot{\overline{R}})] = 0$
$\frac{\partial \overline{T}}{\partial s}(0,t) = 0$	$\overline{T}(s,0) = \overline{T}_2 \quad s > 1$	$\rho(\Omega - \overline{R}\,\dot{\overline{R}})\,\Delta[H] = \Delta\left[\overline{K}\frac{\partial \overline{T}}{\partial s}\right]$
		$\overline{T}(1) = \overline{T}_s$

Nous prenons comme nouvelle fonction la température (au lieu de l'enthalpie) afin d'utiliser des tables usuelles fournissant les propriétés physiques du fluide.

2 - Résolution numérique

a) Méthode :

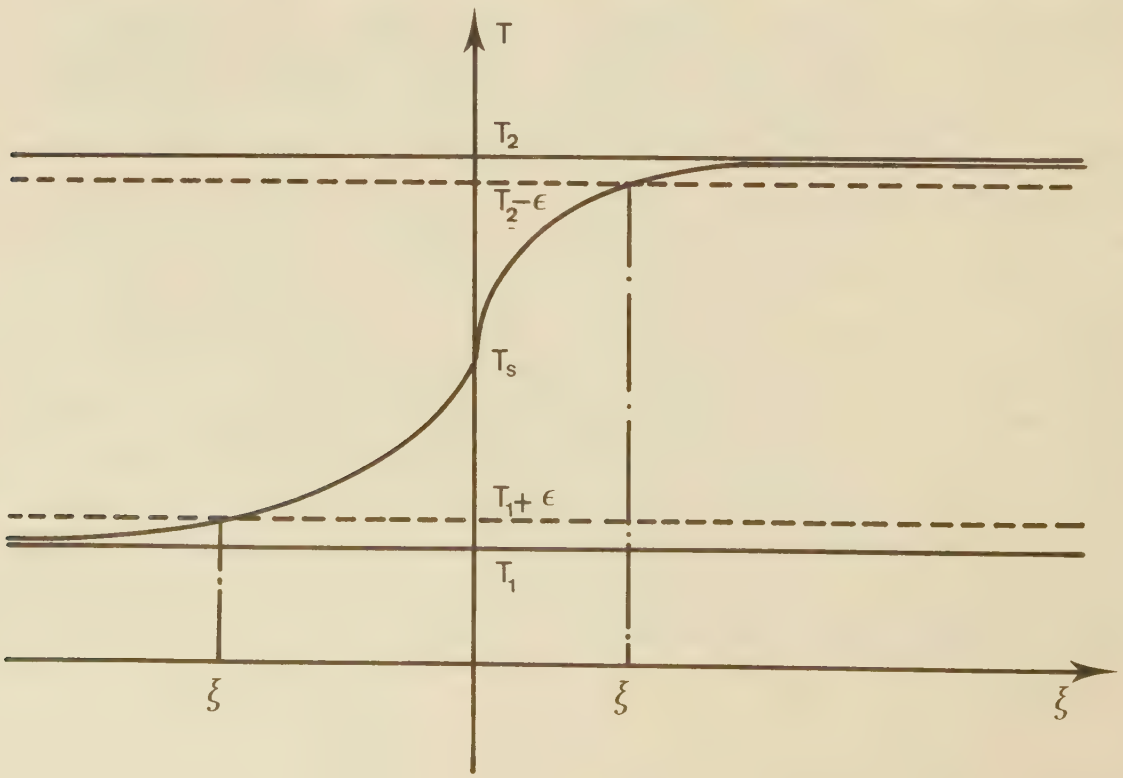
L'équation aux dérivées partielles, parabolique, du système (15) est discrétisée suivant un schéma de CRANK - NICHOLSON [11]. Les coefficients de cette équation dépendent de la distribution de température à chaque instant et nous sommes conduits à résoudre un système d'équations non linéaires par itérations successives. Chaque itération élémentaire comporte l'inversion d'une matrice tridiagonale et le nombre élevé de telles itérations rend nécessaire l'emploi d'un calculateur puissant. Nous avons utilisé un ordinateur CDC 6600 et le temps de calcul nécessaire pour déterminer l'évolution complète d'une goutte est inférieur à deux minutes. La grande capacité de cet ordinateur nous a permis de prendre en compte les variations des propriétés physiques en utilisant des tables classiques (tables VDI) préalablement introduites dans la machine. Afin d'avoir une précision suffisante au voisinage de l'interface, la distribution des points de discrétisation est ajustable de façon à obtenir un nombre de points élevé dans les zones où la température varie brusquement. Elle est telle que le changement de distribution d'espace au cours du temps n'entraîne pas d'interpolation.

b) Traitement des conditions initiales :

Nous nous intéressons à la phase initiale de l'évolution de la goutte ; nous avons donc besoin de connaître une distribution initiale de température précise et satisfaisant aux conditions aux frontières et à l'interface. Les conditions initiales du problème ne sont pas utilisables directement dans un schéma aux différences finies. Nous emploierons la solution affine déterminée explicitement dans le cas de l'interface plan [III - A-1] . Les formules (5) permettent d'obtenir immédiatement la distribution de température dans chaque phase en fonction de la variable affine $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$: $\Theta = \Theta(\xi)$. Nous supposons que l'interface peut être considéré comme plan à l'intérieur d'une pellicule sphérique définie par :

$$X(0)\left[1 - \frac{1}{N}\right] < x < X(0)\left[1 + \frac{1}{N}\right]$$

Ceci est justifié pour des valeurs de N grandes devant l'unité. Un nombre positif ϵ étant donné aussi petit que l'on veut, nous déterminons ξ_0^1 et ξ_0^2 tels que $T_1 + \epsilon = \Theta(\xi_0^1)$ $T_2 - \epsilon = \Theta(\xi_0^2)$. A ces valeurs, nous faisons correspondre $\bar{\tau}_1 = \frac{\lambda_s}{\rho_s}\left(\frac{1}{N\,\xi_0^1}\right)^2$ et $\bar{\tau}_2 = \frac{\lambda_s}{\rho_s}\left(\frac{1}{N\,\xi_0^2}\right)^2$ et nous posons $\tau_0 = \mathrm{INF}\,(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$.



La solution affine est valable dans la pellicule (π) dans le domaine $0 \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{\tau}_0$. En particulier le critère de comportement (7) est applicable dans ces conditions. Nous en déduisons la distribution réelle de température dans la pellicule (π') définie par $1 - \frac{1}{N} \leqslant s \leqslant 1 + \frac{1}{N}$ pour $\bar{t} = \bar{\tau}_0$. En dehors de cette pellicule, pour $\bar{t} = \bar{\tau}_0$, les températures sont constantes et égales aux températures initiales de chaque phase. Nous utilisons une distribution de température tangente à la distribution précédente à l'interface pour démarrer le traitement numérique exposé précédemment.

IV - RESULTATS [12]

A - GENERALITES

Le critère de comportement montre qu'au début de l'évolution d'une goutte froide dans une atmosphère de vapeur surchauffée, il se produit en général une condensation de la vapeur sur la goutte ; celle-ci se réchauffe et son rayon croît. Lorsque l'enthalpie de la goutte atteint une valeur suffisante, la condensation cesse et fait place à une évaporation complète de celle-ci. La mise sous forme adimensionnelle effectuée en (13) montre que le problème étudié dépend des paramètres sans dimensions $B_1 = \frac{H_1 - H_s}{\Delta[H]}$ et $B_2 = \frac{H_2 - H_{sat}}{\Delta[H]}$. Si nous supposons constantes les propriétés physiques de chacune des phases, nous voyons intervenir un troisième paramètre qui est le rapport des diffusivités thermiques de la vapeur et du liquide : $D = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \times \frac{\rho_1}{\rho_2}$.

Pour une valeur fixée de la pression, donc pour une valeur fixée du rapport des diffusivités thermiques, nous avons utilisé le programme de calcul dont nous avons exposé la réalisation pour déterminer les caractéristiques des phases successives de l'évolution de la goutte.

B - CONDENSATION : CROISSANCE INITIALE DU RAYON

1 - Vapeur saturée

Dans le cas où la vapeur reste toute entière à la température de saturation ($B_2 = 0$), la valeur maximum de l'accroissement relatif du rayon peut être calculée en appliquant le premier principe de la thermodynamique au système constitué à l'instant initial par la goutte et par la pellicule sphérique de vapeur de rayon externe R_e qui viendra se condenser sur la goutte. Ce système n'échange pas de chaleur avec l'extérieur et la pression étant constante, l'évolution est isenthalpique. Ecrivant la conservation de la masse et de l'enthalpie, il vient :

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_l H_l + \frac{4}{3}\pi (R_e^3 - R_0^3)_{sat} H_{sat} = \frac{4}{3}\pi (R_e + \Delta R)^3 \rho_s H_s$$

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_l + \frac{4}{3}\pi (R_e^3 - R_0^3) \rho_{sat} = \frac{4}{3}\pi \left[R_0 + \Delta R\right]^3 \rho_s$$

D'où, en supposant $\rho_l = \rho_s$:

$$\left[1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right]^3 = 1 - B_1$$

Ceci détermine la valeur maximum de l'accroissement du rayon dans le cas où $B_2 = 0$. En pratique, $\frac{\Delta R}{R_0} \ll 1$, donc $\frac{\Delta R}{R_0} \simeq -\frac{B_1}{3}$.

2 - Vapeur surchauffée

Dans le cas où B_2 n'est pas nul, un calcul aussi simple n'est plus possible et le recours au programme de calcul numérique est nécessaire. Pour une valeur fixée de la pression, nous avons déterminé la valeur maximum de l'accroissement du rayon pour différentes valeurs des paramètres B_1 et B_2. Les résultats obtenus pour une pression de un bar sont présentés sur la figure 6 où nous avons porté en ordonnée le

rapport $\frac{\Delta R}{R_0}(B_1 , B_2) \Big/ \frac{\Delta R}{R_0}(B_1 , 0)$. Dans les mêmes conditions, nous avons déterminé les valeurs de temps adimensionnel de condensation sur la goutte : $\Delta\tilde{t}_c = \frac{\Delta t_c \ \lambda_s}{\rho_s \ R_0^2}$. Les résultats sont présentés sur la figure 7 .

Nous estimons ainsi l'influence de la surchauffe caractérisée par le paramètre B_2 sur la condensation. Cette influence est d'autant plus grande que $|B_1|$ est plus petit. Evaluons l'augmentation de la durée de vie de la goutte due à la condensation initiale. Cette augmentation est la somme du temps de condensation et du temps nécessaire à évaporer la masse d'eau condensée sur la goutte. Si nous utilisons la solution analytique indépendante du temps pour évaluer la durée de vie d'une goutte saturée ($B_1 = 0$) de rayon R_0 , $t_{evap} = \frac{\rho_1}{2\lambda_2} \frac{R_0^2}{\text{Log}\,(1+B_2)}$.

Il est facile d'évaluer l'augmentation relative de la durée de vie de cette goutte résultant d'une température du liquide inférieure à la température de saturation ($B_1 \neq 0$).

$$\frac{\Delta t_{evap}}{T_{evap}} \leqslant \Delta\tilde{t}_c \frac{2\lambda_2}{\lambda_1} \text{Log}\,(1+B_2) + \frac{2\,|B_1|}{3}$$

Pour de l'eau dans des conditions usuelles d'utilisation, cette augmentation relative est inférieure à 10 % .

C - EVAPORATION DE LA GOUTTE

Pour une valeur fixée de la pression, nous avons déterminé au moyen du programme de calcul, l'évolution au cours du temps pour différentes valeurs du paramètre B_2 , du rayon d'une goutte initialement à la température de saturation ($B_1 = 0$). Il n'y a alors pas de condensation initiale. Nous avons comparé les résultats de cette détermination avec la solution analytique indépendante du temps (12) . Nous avons pu

ainsi estimer l'influence de l'hypothèse de l'état quasi permanent. Le résultat est porté sur les figures 8 et 9. La figure 8 présente la variation du carré du rayon en fonction du temps. Nous désignons par R_0 le rayon initial et $t_{évap}$ le temps d'évaporation calculé à partir de la solution analytique indépendante du temps. La figure 9 présente pour différentes valeurs de B_2 la variation du nombre de NUSSELT en fonction du temps, Nu_0 désigne le nombre de NUSSELT calculé à partir de la solution analytique indépendante du temps (12) . $Nu_0 = \dfrac{2 \text{ Log } (1 + B_2)}{B_2}$.

Pour des valeurs de B_2 couramment envisagées ($B_2 < 0.5$), la solution analytique (12) est une très bonne approximation de la solution complète que nous avons calculée numériquement. Ceci justifie donc l'hypothèse de l'état quasi permanent et les distributions de température et de vitesse obtenues dans cette hypothèse ont pour expression :

(16)

$$\frac{T(r) - T_{sat}}{T_\infty - T_{sat}} = \frac{(1 + B_2)^{1 - \frac{R}{r}} - 1}{B_2}$$

$$V = \frac{K_2}{\rho_2 C_{p_2}} \frac{R}{r^2} \text{ Log } (1 + B_2)$$

V - CONCLUSION

En plus de résultats généraux concernant l'étude du changement de phase pour différentes géométries de l'interface, l'analyse que nous avons faite nous a montré que pour une goutte froide placée dans une vapeur surchauffée, l'évaporation de la goutte est en général précédée d'une période de condensation de la vapeur. Grâce à une étude numérique du problème complet, nous avons déterminé les caractéristiques de cette période initiale : accroissement maximum du rayon et temps de condensation.

Cette étude nous a permis d'estimer la validité des hypothèses permettant une solution analytique simple. Dans le cas de l'eau, l'hypothèse de l'état quasi permanent et de la constance des propriétés physiques (évaluées à une température moyenne conduit à une solution analytique (16) qui rend compte de façon très correcte de la période d'évaporation de la goutte. Nous utiliserons ces résultats pour analyser le comportement d'une goutte en mouvement par rapport à la vapeur environnante.

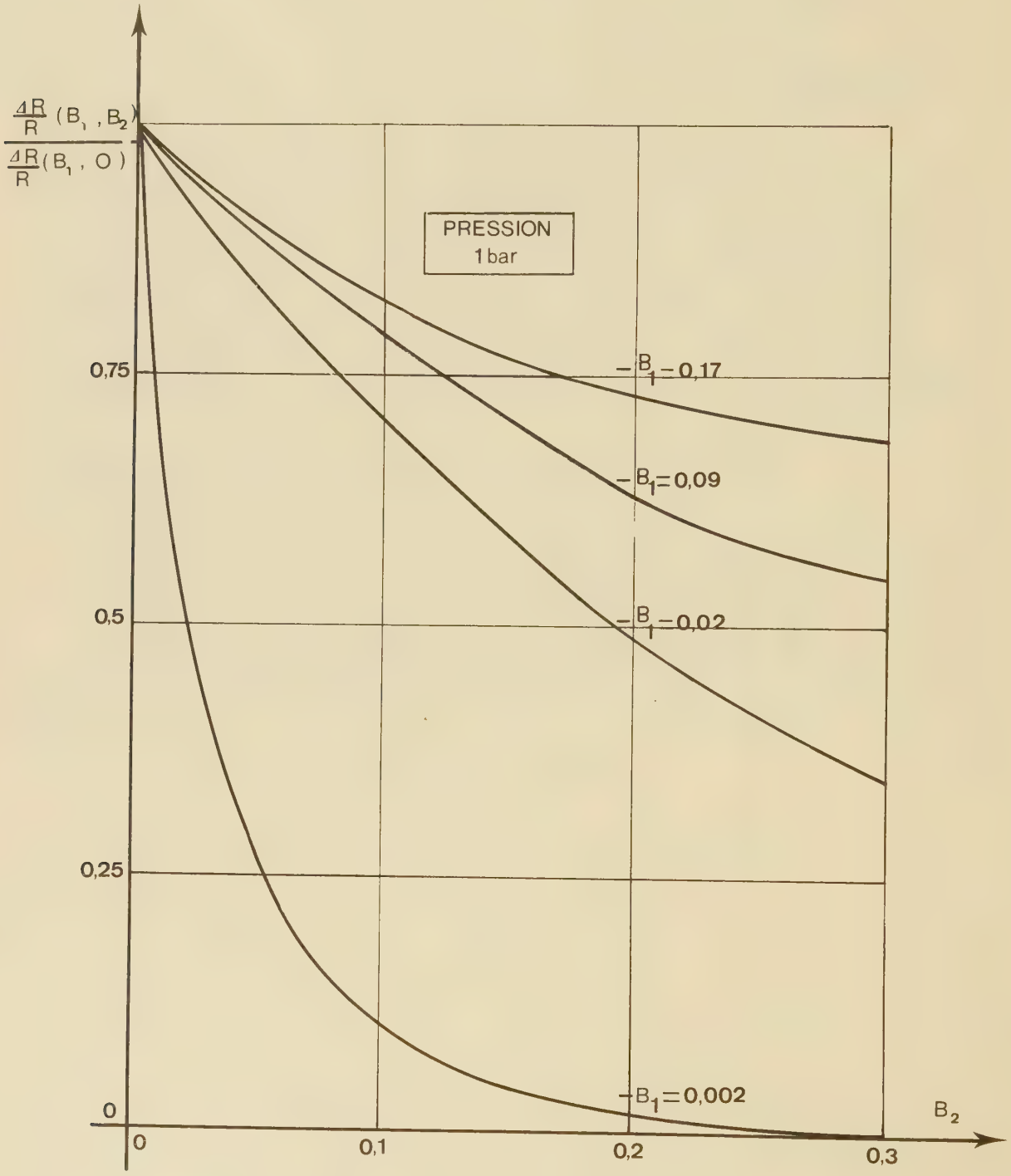


Fig6: INFLUENCE DE LA SURCHAUFFE SUR LA CONDENSATION (accroissement du rayon)

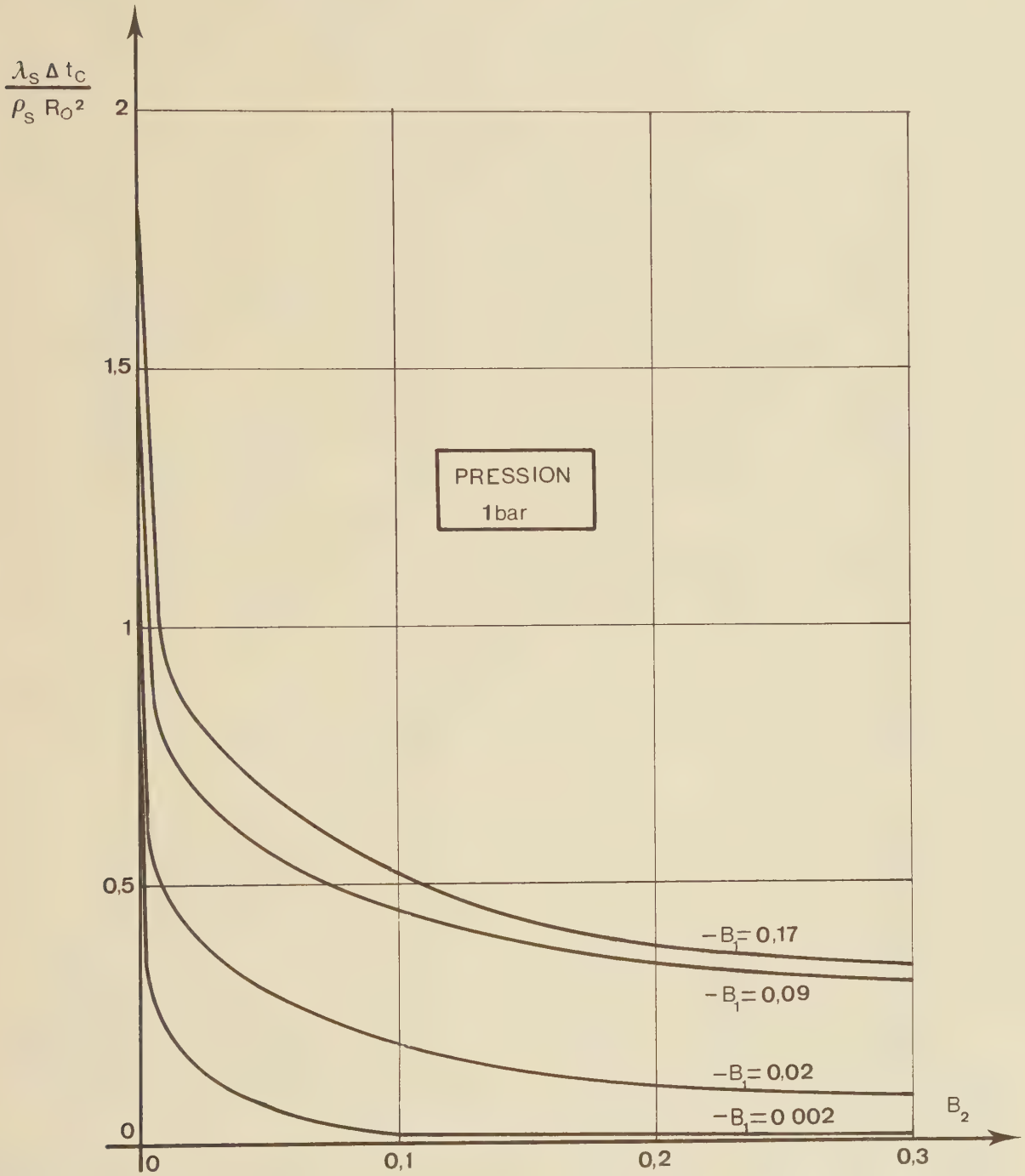


Fig 7 : INFLUENCE DE LA SURCHAUFFE SUR LA CONDENSATION (temps de condensation)

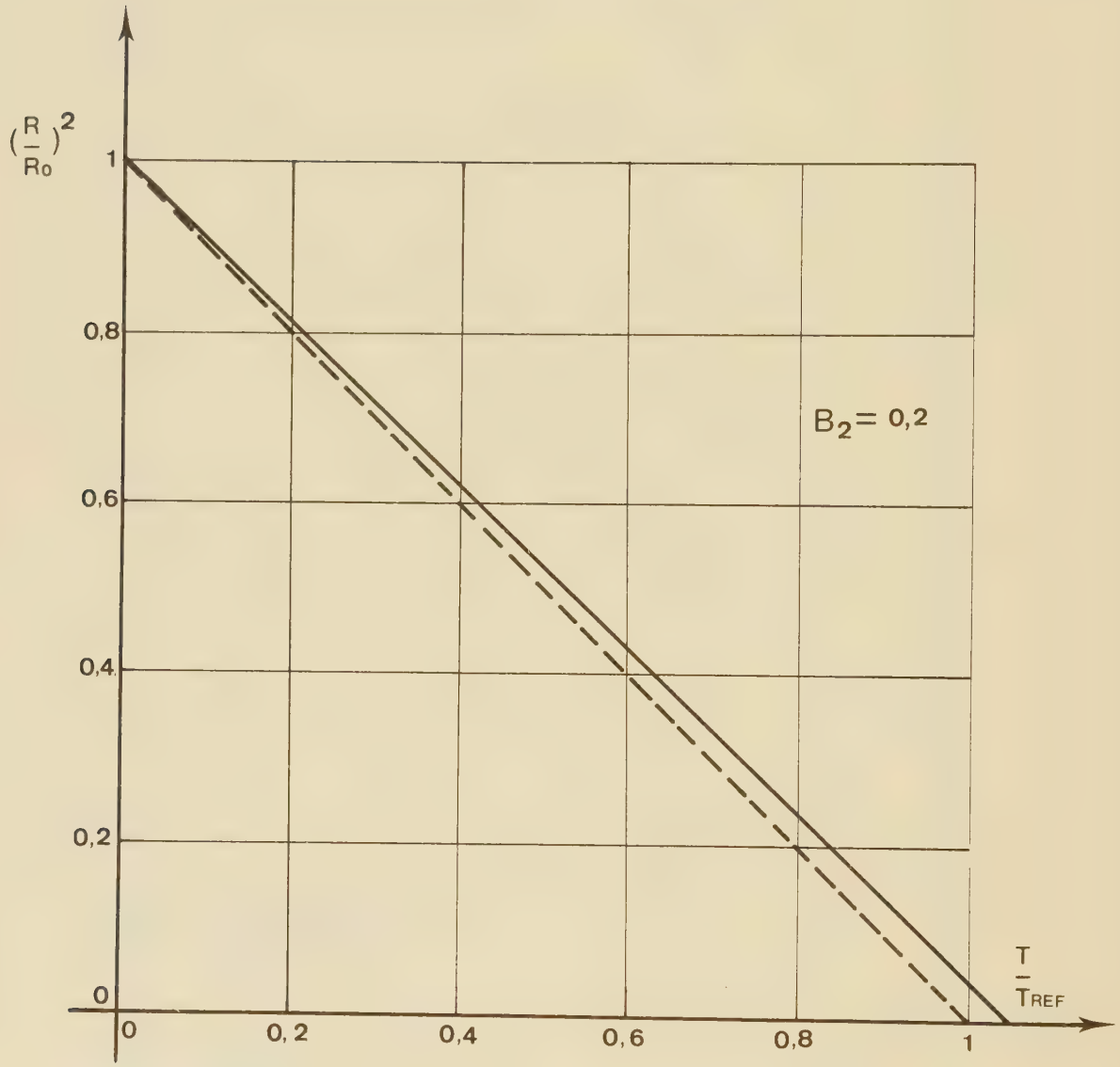


Fig 8: VARIATION DU RAYON AU COURS DE L'EVAPORATION

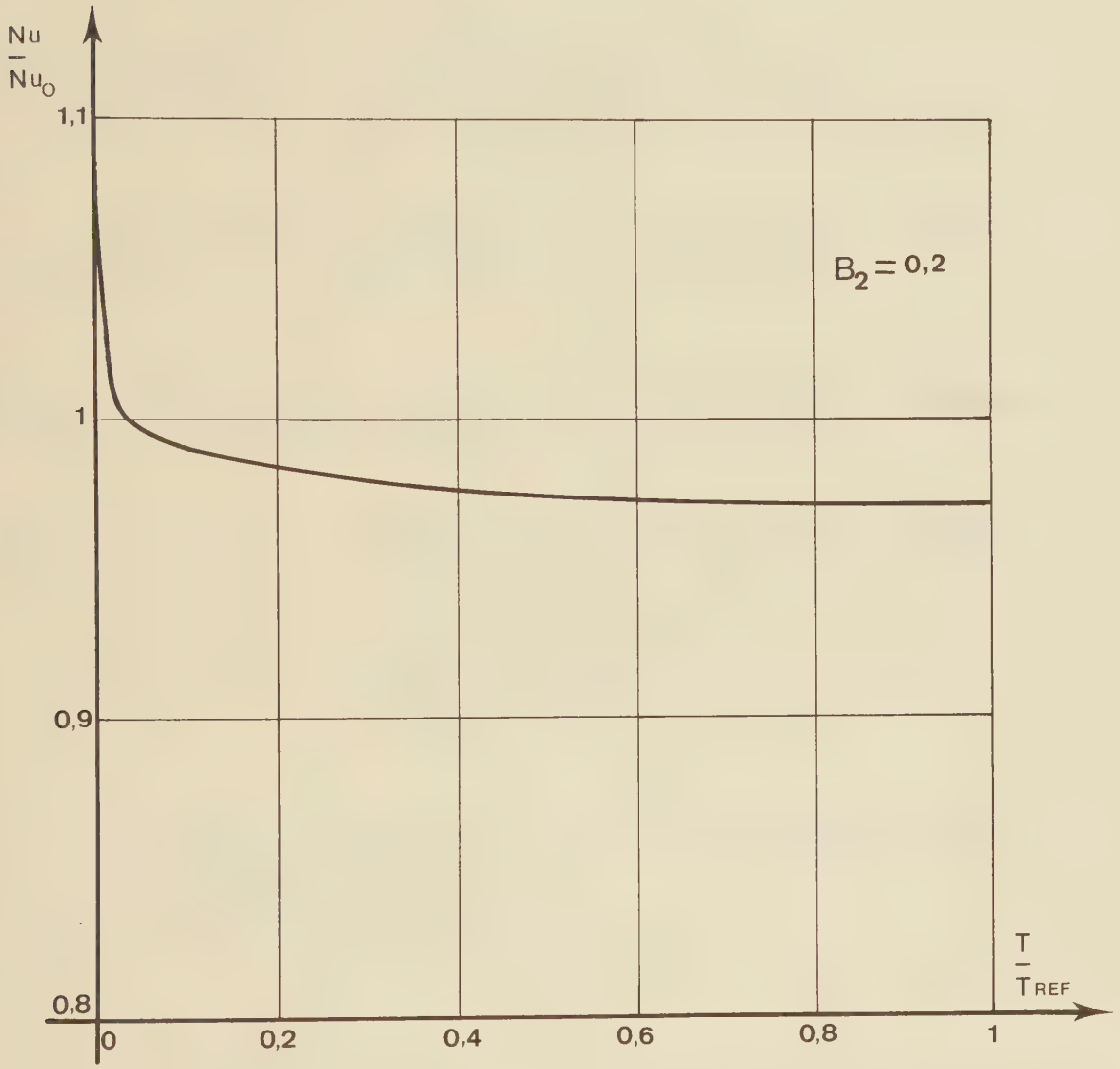


Fig 9 : VARIATION DU NOMBRE DE NUSSELT AU COURS DE L'EVAPORATION

REFERENCES

[1] GODSAVE G : Fourth Symposium on Combustion . The Williams and Wilkins Co. Baltimore 1953.

[2] GOLDSMITH M. et PENNER S.S. : J of Prop. 24 : 245 (1954).

[3] RANZ W.E. : Trans. A.S.M.E. 78 : 909 (1956).

[4] SPALDING D.B. : Fourth Symposium on Combustion. The Williams and Wilkins Co. Baltimore 1953.

[5] DUDA J.L. et VRENTAS J.S. : Heat or mass transfer controlled dissolution of an isolated sphere. International Journal of Heat and Mass Transfer 14 , 1971.

[6] HOFFMAN T.N. et GAUVIN W.H. : Evaporation of stationnary droplets in high temperature surroundings.

[7] ROSS L.L. : Forced convection evaporation of droplets in a high temperature environment. P.H.D. Thesis. Mac Master University 1966.

[8] HANSEN A.G. : Similarity analysis in boundary value problem in engineering. Prentice Hall Inc. (1964).

[9] MONTLUCON J. : Contribution à l'étude du transfert de chaleur et de masse au voisinage d'un interface plan. C.R. Acad. Sc. Paris t 270, 25 Mai 1970.

[10] CASEAU P. : Communication privée.

[11] RITCHMYER R.D. : Difference Methods for Initial Value Problems. Interscience. New York 1957.

[12] MONTLUCON J. : Contribution à l'étude du comportement d'une goutte d'eau froide immobile dans une atmosphère calme de vapeur surchauffée. C.R. Acad. Sc. Paris, Mai 1972.

ANNEXE A I.1

A partir des distributions de température et de pression obtenues analytiquement (16), nous allons examiner la légitimité des hypothèses ayant permis la simplification du système (1).

1) - Température de surface :

L'introduction des formules (16) dans l'équation (1), 2 conduit, après intégration à la relation :

$$p_s - p_s = \frac{\rho_2}{2} \left[\frac{K_2}{\rho_2 \, Cp_2} \, \frac{\text{Log} (1 + B)}{R} \right]^2$$

Pour une goutte de $10 \, \mu$ de rayon placée dans des conditions usuelles ($B < 1$) ceci conduit à :

$$p_s - p < 10^{-5} \text{ bars}$$

ce qui correspond à une différence de température de saturation parfaitement négligeable :

$$T_s (p_s) - T_s (p_s) < 10^{-3} \, ^\circ C$$

2) - Dissipation visqueuse :

Les formules (16) permettent de déterminer directement l'ordre de grandeur du rapport des termes de dissipation visqueuse et de convection intervenant dans l'équation (1) - 3.

$$\frac{\text{Terme de dissipation visqueuse}}{\text{Terme de convection}} = \text{Ord} \left[\frac{K_2 \, \eta_2}{\rho_2^2 \, Cp^2 \, R \, \mathcal{L}} \right]$$

Pour les gouttes envisagées ci-dessus, ceci conduit à une valeur de ce rapport inférieure à 10^{-10}. La dissipation visqueuse est donc bien négligeable.

3) - Conclusion :

La détermination analytique des distributions de température et de vitesse permettent de justifier a posteriori les hypothèses ayant permis leur établissement.

Chapitre II

Comportement d'une goutte d'eau en mouvement relatif par rapport à une atmosphère calme de vapeur surchauffée

S O M M A I R E

Pages

I - INTRODUCTION 77

II - POSITION DU PROBLEME 78

A. CADRE DE L'ETUDE 78
B. ETABLISSEMENT DES EQUATIONS 79

III - METHODE DE RESOLUTION 81

A. GENERALITES ET RAPPELS 81

1. Ordres de grandeurs 82
2. Développement asymptotique régulier 82
3. Problème de perturbation singulière 83

B. CARACTERISTIQUES D'UN DOMAINE DE VALIDITE, FORME ADIMENSIONNELLE 84

C. FORMES SIMPLIFIEES POSSIBLES DES EQUATIONS 85

D. PROBLEME DE PERTURBATION SINGULIERE. RECHERCHE D'UN DEUXIEME DEVELOPPEMENT 88

1. Caractéristiques d'un deuxième domaine 88
2. Choix d'un petit paramètre 90
3. Introduction d'un troisième domaine 92

E. INTERPRETATION PHYSIQUE 95

IV - RESOLUTION DES EQUATIONS 96

A. GENERALITES 96

B. DETERMINATION DES APPROXIMATIONS 99

1. Ordre 1 99
α Domaine $\mathfrak{D}_1$ 99
β Domaine $\mathfrak{D}_2$ 100
γ Domaine $\mathfrak{D}_3$ 100

Pages

2. Ordre $Pe^{1/2}$ 100

a) Détermination de la température 100

α Domaine $\mathfrak{D}_3$ 100

β Domaine $\mathfrak{D}_2$ 101

γ Domaine $\mathfrak{D}_1$ 101

b) Détermination de la fonction de courant 102

α Domaine $\mathfrak{D}_2$ 102

β Domaine $\mathfrak{D}_3$ 102

3. Ordre Pe 102

a) Détermination de la température 102

α Domaine $\mathfrak{D}_3$ 102

β Domaine $\mathfrak{D}_2$ 103

γ Domaine $\mathfrak{D}_1$ 103

b) Détermination de la fonction de courant 107

α Domaine $\mathfrak{D}_2$ 107

β Domaine $\mathfrak{D}_3$ 107

4. Ordres $Pe^{3/2}$ et $Pe^{3/2}\text{Log Pe}$ 108

a) Détermination de la température 108

α Domaine $\mathfrak{D}_3$ 108

β Domaine $\mathfrak{D}_2$ 108

γ Domaine $\mathfrak{D}_1$ 109

b) Détermination de la fonction de courant 109

α Domaine $\mathfrak{D}_2$ 109

β Domaine $\mathfrak{D}_3$ 109

5. Ordres Pe^2 et $Pe^2\text{Log Pe}$ 110

6. Conclusion 115

Pages

V - RESULTATS 116

A. DETERMINATION DU NOMBRE DE NUSSELT 116

B. DETERMINATION DU COEFFICIENT DE TRAINEE 117

1. Terme de pression 118
2. Terme de transfert de masse 119
3. Terme de cisaillement 120

C. RESULTATS 121

1. Nombre de NUSSELT 121
2. Coefficient de traînée 121

VI - CONCLUSION 124

N O T A T I O N S

Variables		Dimension
r^*	Rayon vecteur	L
v^*	Vitesse	$L\,T^{-1}$
k^*	Conductivité thermique	$M\,L\,T^{-3}\theta^{-1}$
T^*	Température	0
$\overline{T}$	$\dfrac{T^* - T_S^*}{T_\infty^* - T_S^*}$	0
U^*	Vitesse	$L\,T^{-1}$
R^*	Rayon de la goutte	L
B	$\dfrac{H - H_S}{\mathcal{L}^*}$	0
Pr	ν/α (Nombre de PRANDTL)	0
Pe	$R^*\,U^*\,/\,\alpha^*$ (Nombre de PECLET)	0
$\mathcal{L}^*$	Chaleur latente de vaporisation	$L^2\,T^{-2}$
H^*	Enthalpie massique	$L^2\,T^{-2}$
$\mathcal{D}_i$	Domaine de validité d'un développement asymptotique	
L_{bi}^*	Longueur caractéristique du domaine $\mathcal{D}_i$	L
$C_{i,j}$	Constante d'intégration (fonction de courant) ..	0
$K_{i,j}$	Constante d'intégration (température)	0

		Dimension
α^*	Diffusivité thermique	$L^2\ T^{-1}$
α_i, β_i, γ_i	Coefficients (Annexe II,2)	
δ	Fonction de B et Pr ((24'))	0
ϵ	Fonction de B et Pr ((40))	0
ζ	Fonction de B et Pr ((24'))	0
η^*	Viscosité dynamique	$M\ L^{-1}\ T^{-1}$
θ, ξ, τ	Paramètres adimensionnels (II-C)	0
μ	Log (1+B) .....(10').....	0
λ	Log (1+B) x $\frac{1+B}{B}$ .....(10').....	0
ν^*	Viscosité cinématique	$L^2\ T^{-1}$
$\nu_i\ (\epsilon)$	Séquence asymptotique	
ρ^*	Masse volumique	$M\ L^{-3}$
σ	Cos φ	
φ	Colatitude	
ψ^*	Fonction de courant de STOKES	$L^3\ T^{-1}$

Opérateurs :

$$D^2 f : \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1-\sigma^2}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$$

$$\mathcal{H}(f,g) : \frac{\mathcal{D}(f, g)}{\mathcal{D}(r, \sigma)} \quad \text{(Jacobien)}$$

$$\mathcal{L}(f,g) : \frac{\mathcal{D}\left(f, \frac{1}{r^2(1-\sigma^2)} D^2 g\right)}{\mathcal{D}(r, \sigma)}$$

$$\nabla^2 g : \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial}\left((1-\sigma^2) \frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)\right)$$

Fonctions :

P_k : Polynome de LEGENDRE de rang k

$Q_k[\sigma] : \int_{-1}^{\sigma} P_k(t)\, dt$ Polynome de GEGENBAUER de rang k

Indices :

$F_{i,j,k}$

- i caractérise le domaine
- j caractérise l'ordre d'approximation
- k caractérise le rang de la composante

Signes particuliers : Dimension

f^* : Grandeur physique

f_o^* : Grandeur physique de référence

$\bar{f}$: $\frac{f^*}{f_o^*}$ Quantité adimensionnelle 0

I - INTRODUCTION

Après l'étude relativement complète de l'évolution d'une goutte immobile que nous avons développée au précédent chapitre, nous sommes naturellement conduits à analyser le comportement d'une goutte en mouvement relatif par rapport à une atmosphère calme de vapeur surchauffée. Nous cherchons à déterminer les champs de vitesse et de température autour d'une goutte donnée. Nous voulons en déduire le coefficient de traînée et le nombre de NUSSELT correspondant qui traduisent le résultat des interactions dynamiques et thermiques de la goutte liquide avec la vapeur environnante. Il est intéressant de déterminer analytiquement ces éléments en fonction des paramètres adimensionnels définissant l'état du système qui, pour des gouttes de liquide à température de saturation, sont le nombre de REYNOLDS construit à partir du rayon de la goutte et de la vitesse relative de la vapeur, le nombre de PRANDTL de la vapeur et le paramètre caractéristique de la surchauffe $B = \frac{H_\infty - H_s}{\mathcal{L}}$ que nous avons vu apparaître au chapitre précédent. De telles formules explicites sont nécessaires pour mener à bien, selon une méthode analogue à celle développée en [1] et [2], l'analyse globale d'un système diphasique dans lequel la phase liquide est dispersée sous forme de gouttes suffisamment éloignées les unes des autres pour pouvoir être considérées comme indépendantes.

Nous nous intéressons particulièrement aux gouttes dont le nombre de REYNOLDS est petit. De telles conditions sont en pratique fréquentes. Elles concernent les systèmes diphasiques où la granulométrie de la phase liquide est extrêmement petite et ceux où la majeure partie de l'évolution de la phase liquide se produit alors que la vitesse relative des deux phases est faible. Nous allons montrer que ce cas (Re petit) est susceptible d'une approche analytique que nous allons développer.

II - POSITION DU PROBLEME

A. CADRE DE L'ETUDE

Nous considérons une goutte de liquide située dans un écoulement de la vapeur correspondantedont les caractéristiques loin de la goutte (température, pression, vitesse) sont connues. Nous nous proposons d'analyser l'écoulement autour de la goutte ainsi que les phénomènes de transferts de chaleur et de masse mis en jeu.

Nous allons utiliser les résultats de la précédente analyse du comportement d'une goutte immobile dans une atmosphère calme et nous supposerons valables pour la présente étude les hypothèses qui, auparavant, ont permis l'établissement de solutions analytiques. Nous supposons donc que :

- des conditions d'équilibre thermodynamique règnent à l'interface.

- L'énergie q_R transmise par rayonnement est entièrement absorbée par le liquide et $q_R = a_p \, 4 \, \pi \, R^2 \, \sigma \, (T_w^4 - T_s^4)$.

- La pression de la vapeur reste peu différente de la pression à l'infini et la température de l'interface a pour valeur la température de saturation correspondant à cette pression. $T_s = T_s \, (P\infty)$.

- Les propriétés physiques de la vapeur peuvent être considérées comme constantes et sont évaluées à une pression égale à la pression à l'infini et à une température moyenne arithmétique entre la température de saturation correspondante et la température à l'infini.

- La goutte reste parfaitement sphérique ce qui est justifié pour de faibles rayons et de faibles vitesses.

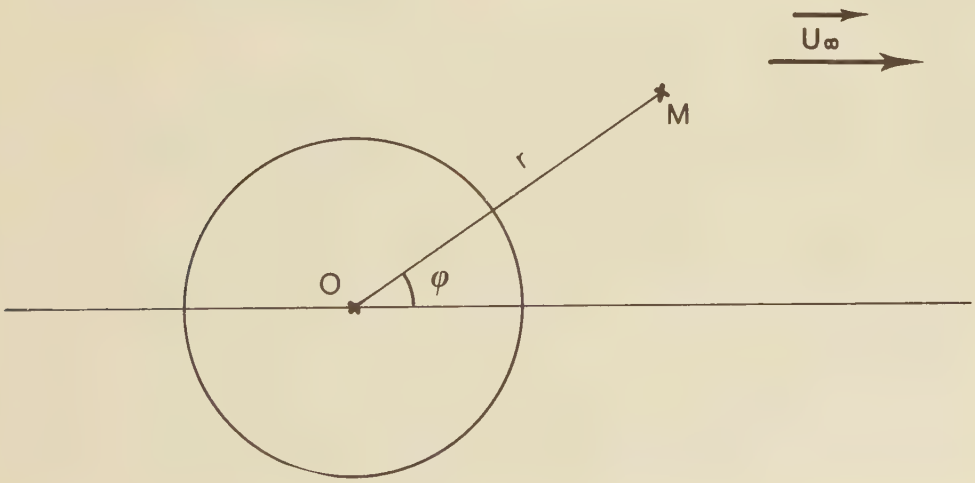
- La goutte reste isotherme et sa température est partout égale à la température de saturation qui règne à l'interface. Ceci est justifié en dehors d'une période de réchauffement qui, nous l'avons vu, est faible devant la durée de vie de la goutte immobile et que nous négligerons devant la durée de vie d'une goutte en mouvement.

- Dans un repère lié à la goutte, la vitesse de circulation du liquide est négligeable devant la vitesse de la vapeur. Ceci est justifié par la grande différence entre les viscosités dynamiques du liquide et de la vapeur.

- L'évolution du système peut être représentée par une succession d'états quasi-permanents et les variations du rayon de la goutte et de sa vitesse peuvent être déterminées à partir des distributions de vitesse et de température solutions du problème indépendant du temps ayant pour paramètres les paramètres instantanés du système réel. Ceci nous conduit à négliger dans les équations les dérivées partielles par rapport au temps et à considérer comme indépendante du temps la vitesse relative de la goutte et de la vapeur.

B. ETABLISSEMENT DES EQUATIONS

Nous nous plaçons dans un repère lié au centre de la goutte et nous ne prenons en compte que la phase vapeur. La goutte étant parfaitement sphérique et la vitesse à l'infini de la vapeur étant uniforme, le problème étudié possède une symétrie de révolution autour d'un axe parallèle à la vitesse à l'infini passant par le centre de la goutte. Nous allons déterminer les distributions de température et de vitesse dans un plan méridien.



Nous caractérisons par un * les quantités physiques (par opposition aux quantités adimensionnelles) caractérisées par un $-$ et nous définissons les opérateurs suivants :

$$D_i^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r_i^2} + \frac{1-\sigma^2}{r_i^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \quad , \quad \nabla_i^2(f) = \frac{1}{r_i}\,\frac{\partial}{\partial r_i}\left(r_i \frac{\partial f}{\partial r_i}\right) + \frac{1}{r_i^2}\,\frac{\partial}{\partial \sigma}(1-\sigma^2)\frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

$$\mathcal{L}_i(f,g) = \frac{\mathcal{D}\left[f, \dfrac{1}{r_i^2\,(1-\sigma^2)}\,D_i^2(g)\right]}{\mathcal{D}(r_i, \sigma)} \quad , \mathcal{H}_i(f,g) = \frac{\mathcal{D}(f,g)}{\mathcal{D}(r_i,\sigma)} \quad \text{(Jacobien)}$$

Nous emploierons la fonction de courant de STOKES ψ^* telle que :

$$v_r^* = \frac{1}{r^{*2}}\,\frac{\partial \psi^*}{\partial \sigma} \quad , \quad v_\varphi^* = \frac{1}{r^* \sqrt{1-\sigma^2}}\,\frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \qquad \text{avec} \quad \sigma = \cos\varphi \ .$$

La masse volumique de la vapeur étant constante, l'équation de continuité est automatiquement satisfaite. L'élimination de la pression entre les équations de NAVIER-STOKES conduit de manière classique à l'équation de compatibilité.

$$\vec{V^*} \cdot \vec{\nabla}\,\omega^* - \vec{\omega^*} \cdot \vec{\nabla}\,V^* - \nu^* \nabla^2 \omega^* = 0 \qquad \text{avec} \quad \vec{\omega^*} = \overrightarrow{\text{rot}\ V^*}$$

L'équation d'énergie s'écrit :

$$\vec{V^*} \cdot \vec{\nabla}\,T^* - \alpha^* \nabla^2 T^* = 0$$

Avec les notations définies ci-dessus ces deux équations s'écrivent :

(1)

$$\nu^* D_*^4 \psi^* + (1-\sigma^2)\,\mathcal{L}_*(\psi^*, \psi^*) = 0$$

$$\alpha^* \nabla_*^2 T_* + \frac{1}{r^2}\,\mathcal{H}_*(\psi^*, T^*) = 0$$

Au système d'équations (1) sont associées les conditions aux frontières suivantes :

$$T^*(R^*,\sigma) = T_s \qquad \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*}(R^*,\sigma) = 0 \qquad K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}(R^*,\sigma) = \frac{\rho^* L^*}{R^{*2}} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}(R,\sigma)$$

$$\lim_{r^* \longrightarrow \infty} T^*(r^*,\sigma) = T_\infty \qquad \lim_{r^* \longrightarrow \infty} \psi^*(r^*,\sigma) = U_\infty r^{*2} \frac{\sigma^2 - 1}{2}$$

A la surface de la goutte, la température est égale à la température de saturation et la vitesse de la vapeur est normale à cette surface et proportionnelle au gradient de température. A l'infini, la température et la vitesse sont uniformes.

III - METHODE DE RESOLUTION

A . GENERALITES ET RAPPELS

Une solution analytique directe des équations établies ci-dessus n'est pas possible. Nous allons utiliser dans ce chapitre une méthode de recherche de solution développée par KAPLUN [4] et par Van DYKE M. [5] ayant des applications dans les domaines les plus divers. Nous cherchons à déterminer une solution des équations sous forme de développements asymptotiques par rapport à un paramètre que nous préciserons ultérieurement et qui fera intervenir la vitesse de la vapeur à l'infini. L'emploi d'une telle méthode nécessite le rappel des définitions d'un certain nombre de termes et de notations qui vont être données ici. Les notations utilisées sont celles de Van DYKE M.[5].

1. Ordres de grandeur : o , Ord

$y = o(z)$ $x \to a$ veut dire que, lorsque x tend vers a , le rapport $\frac{y}{z}$ tend vers zéro ;

$y = Ord(z)$ $x \to a$ veut dire que, lorsque x tend vers a, le rapport $\frac{y}{z}$ tend vers une constante non nulle.

2. Développement asymptotique régulier

Une fonction $f(x, \varepsilon)$ définie pour $x \in \mathcal{D}$ et $\varepsilon \in [\varepsilon_o, \varepsilon_1]$ admet un développement asymptotique régulier par rapport au paramètre ε quand celui-ci tend vers ε_o s'il existe une suite de couples de fonctions $(f_n(x), \nu_n(\varepsilon))$ telle que pour toute valeur de $x \in \mathcal{D}$ et toute valeur de m entier, on ait :

$$\nu_{m+1}(\varepsilon) = o(\nu_m(\varepsilon)) \qquad \varepsilon \to \varepsilon_o$$

$$f(x,\varepsilon) - \sum_{o}^{m} \nu_i(\varepsilon) f_i(\varepsilon) = o[\nu_m(\varepsilon)] \quad \varepsilon \to \varepsilon_o$$

La fonction $f(x)$ peut être définie explicitement ou être solution d'un système d'équations différentielles complété de conditions aux frontières dans le domaine $\mathcal{D}$. L'ensemble des fonctions $\nu_n(\varepsilon)$ est une séquence asymptotique et l'ensemble des fonctions $f_n(x)$ est l'ensemble des approximations d'ordre $\nu_n(\varepsilon)$. Si une fonction $f(x, \varepsilon)$, solution d'une équation différentielle, admet un tel développement asymptotique régulier, il est aisé de déterminer les équations différentielles et les conditions satisfaites par les différentes approximations. Si le paramètre ε est bien choisi et s'il figure dans les équations on est souvent conduit à des équations différentielles successives beaucoup plus simples que l'équation initiale . On peut ainsi obtenir un développement de la fonction par une méthode qui est une méthode de perturbation régulière.

Si l'on peut montrer qu'il n'existe pas, quelle que soit la séquence asymptotique choisie, d'approximation d'ordre $\nu_n(\varepsilon)$, en particulier, si l'on montre qu'il n'existe pas d'approximation d'ordre 1, [6], c'est que la fonction $f(x,\varepsilon)$ n'admet pas de développement asymptotique régulier par rapport à ε pour $x \in [\mathcal{D}]$. Le problème est alors un problème de perturbation singulière.

3. Problème de perturbation singulière : Méthode des développements raccordés.

Lorsque pour une fonction $f(x,\varepsilon)$, $(x \in \mathcal{D}, \varepsilon \in [\varepsilon_o, \varepsilon_1]$ il est impossible de construire un développement asymptotique régulier on se trouve confronté à un problème dit de perturbation singulière. En règle générale, il existe pour la fonction $f(x,\varepsilon)$ N développements asymptotiques. Le $i^{ème}$ développement asymptotique est défini par l'existence des grandeurs suivantes :

- une suite de couples de fonctions $f_n^i(x)$, $\nu_n^i(\varepsilon)$,
- une fonction $\Delta_i(\varepsilon)$,
- une fonction X_i,
- un domaine $\mathcal{D}_i$ avec $\bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{D}_i = \mathcal{D}$.

Pour $x \in \mathcal{D}_i$ et $\varepsilon \in [\varepsilon_o, \varepsilon_1]$ la suite $\left[f_n^i\left(\frac{x - X_i}{\Delta_i(\varepsilon)}\right), \nu_n^i(\varepsilon) \right]$ constitue un développement régulier de $f(x,\varepsilon)$ dans $\mathcal{D}_i$.
De plus, les intervalles $\mathcal{D}_i$ vérifient la condition suivante :
$D_i \cap D_{i+1} \neq 0$ qui traduit l'existence de domaines où deux développements sont simultanément valables et peuvent être raccordés.

La méthode des développements raccordés consiste à remplacer la recherche d'un développement asymptotique valable dans tout le domaine $\mathcal{D}$ par la recherche de plusieurs développements asymptotiques valables chacun dans un domaine $\mathcal{D}_i$. La recherche de chaque développement conduit à la résolution d'équations différentielles éventuellement plus simples et au remplacement, s'il y a lieu, des conditions aux frontières par des conditions de raccord entre deux développements valables dans des domaines contigus.

L'examen des approximations d'ordre 1, solution des équations obtenues pour la valeur limite du paramètre, permet en général de préciser le nombre et la taille des domaines de validité de chaque développement asymptotique [6] . Un tel schéma de résolution au moyen de cette méthode des développements raccordés est, en général, susceptible d'une interprétation physique et cette technique est applicable dans les domaines les plus divers en particulier en mécanique des fluides [5], [7]. Les problèmes de couche limite sont des problèmes de perturbation singulière dans lesquels on considère deux domaines distincts l'un proche de la paroi, l'autre loin de la paroi dans lesquels on peut construire deux développements asymptotiques distincts par rapport à un petit paramètre qui est l'inverse du nombre de REYNOLDS. Les approximations d'ordre 1, seules prises en compte en général, sont solutions d'équations différentes, formes simplifiées pour la valeur limite du paramètre des équations du problème. Remarquons enfin que de telles méthodes s'appliquent à toute fonction solution ou non d'une équation donnée. RONAT J. [8] a appliqué cette technique à l'étude de la couche limite turbulente avec transfert thermique sans partir des équations mais d'hypothèses sur les formes, dans différents domaines, des lois de vitesse et de température suggérées par l'analyse dimensionnelle et vérifiées par l'expérience.

B. CARACTERISTIQUES D'UN DOMAINE DE VALIDITE - FORME ADIMENSIONNELLE

Revenons au problème défini au paragraphe II et traduit par le système d'équations (1) .Nous considérons un paramètre dépendant de la vitesse à l'infini et s'annulant avec elle. La détermination des différents domaines de validité des divers développements asymptotiques est indépendante du choix de ce paramètre. Nous le préciserons ultérieurement et lorsque nous parlerons sans autre précision d'ordre de grandeur d'une quantité cela voudra dire ordre de grandeur de cette quantité quand le paramètre tend vers zéro.

Dans un repère lié à la goutte nous caractérisons un domaine $\mathcal{D}_i$ entourant la goutte par l'ordre de grandeur $L^*_{i,o}$ du rayon vecteur d'un point de $\mathcal{D}_i$ et nous désignons par $\psi^*_{i,o}$ et $T^*_{i,o}$ les

ordres de grandeur dans le domaine $\mathcal{D}_i$ de ψ^* et de $(T^*_\infty - T^*_s)$. Les nouvelles variables et fonctions adimensionnelles :

$$\bar{r}_i = \frac{r^*}{L^*_{i,o}} \quad , \quad \bar{\psi}_i = \frac{\psi^*}{\psi^*_{i,o}} \quad , \quad \bar{T}_i = \frac{T^* - T^*_s}{T^*_{i,o}}$$

sont d'ordre unité dans le domaine $\mathcal{D}_i$. Si nous introduisons les 3 paramètres $\xi_i = \frac{L^*_{i,o}\,\alpha^*}{\psi^*_{i,o}}$, $\theta_i = \frac{L^*_{i,o}}{R^*}$, $\tau_i = \frac{T^*_{i,o}}{T^* - T^*_s}$, nous pouvons, pour des conditions déterminées écrire les équations (1) au moyen des quantités adimensionnelles $\bar{r}_i$, $\bar{\psi}_i$, $\bar{T}_i$ et des paramètres ξ_i , θ_i , τ_i, Pr, B, Pe (Pr, B et Pe sont des données du problème).

(2)

$$\xi_i\, \bar{D}^4_i\, \bar{\psi}_i + (1-\sigma^2)\, Pr^{-1}\, \bar{\mathfrak{L}}_i\, (\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i) = 0$$

$$\xi_i\, \bar{\nabla}_i^2\, T_i + \frac{1}{\bar{r}_i^2}\, \bar{\mathfrak{K}}_i\, (\bar{\psi}_i, \bar{T}_i) = 0$$

avec :

$$\bar{T}_i\,(1,\sigma) = 0 \qquad \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{r}_i}(1,\sigma) = 0 \qquad \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{r}_i}(1,\sigma) = \frac{Pr}{B\tau_i}\,\frac{\theta_i^2}{\xi_i}\,\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \sigma}(1,\sigma)$$

$$\lim_{\bar{r}_i \to \infty} \bar{T}_i(\bar{r}\ \sigma) = \frac{1}{\tau_i} \qquad \lim_{\bar{r}_i \to \infty} \bar{\psi}_i\,(\bar{r}_i, \sigma) = Pe.Pr^{-1}.\theta_i.\xi_i \bar{r}_i^2\ \frac{\sigma^2-1}{2}$$

Lorsque $\mathcal{D}_i \equiv R^3$

C. FORMES SIMPLIFIEES POSSIBLES DES EQUATIONS

Les approximations d'ordre 1 sont solutions des équations obtenues en faisant tendre vers zéro le paramètre dépendant de la vitesse à l'infini. On peut espérer, comme dans tout problème de perturbation, que ces équations ont une forme simplifiée par rapport à celle des équa-

tions générales du problème. Or, elles dépendent des deux paramètres adimensionnels $\xi_i = \frac{\alpha^* L^*_{i,o}}{\psi^*_{i,o}}$ et $Pr = \frac{\nu^*}{\alpha^*}$ (nombre de PRANDTL de la vapeur). Le tableau suivant présente de manière exhaustive les seules formes simplifiées possibles.

	$\xi_i = o(1)$	$\xi_i = Ord(1)$	$\frac{1}{\xi_i} = o(1)$
$Pr = o(1)$	Equation de fluide parfait Equation de convection	Equation de fluide parfait Equation de conduction et de convection	Equation de NAVIER-STOKES Equation de conduction
$Pr = Ord(1)$	Equation de fluide parfait Equation de convection	Equation de NAVIER-STOKES Equation de conduction et de convection	Equation de STOKES Equation de conduction
$\frac{1}{Pr} = o(1)$	Equation de NAVIER-STOKES Equation de convection	Equation de STOKES Equation de conduction et de convection	Equation de STOKES Equation de conduction

TABLEAU (3)

Nous désignons évidemment par équation de STOKES (ou équation de fluide parfait) l'équation vérifiée par la fonction de courant de STOKES lorsque l'on néglige les termes d'inertie (ou les termes visqueux). De même, nous désignons par équation de conduction pure (ou de convection pure) l'équation vérifiée par la température lorsque l'on néglige les termes de convection (ou de conduction).

ACRIVOS A. et TAYLOR T.D. [9] , RIMMER [10] ont étudié le problème du transfert thermique autour d'une sphère solide dans un écoulement caractérisé par un faible nombre de REYNOLDS. La forme simplifiée ayant pour solution la première approximation dans un domaine contigu à la sphère est constituée d'une équation de STOKES et d'une équation de conduction pure. Le tableau (3) montre que le schéma de perturbation adopté n'est pas valable pour de très petits nombres de PRANDTL. FENDELL F.E. et al. [11] ont étudié le transfert de chaleur autour d'une sphère dans un écoulement de STOKES avec transfert de masse à la paroi. La forme simplifiée ayant pour solution la première approximation dans un domaine contigu à la sphère est constituée d'une équation de STOKES et d'une équation de conduction et de convection. Le tableau (3) montre que le schéma de perturbation adopté par ces auteurs n'est correct que pour des nombres de PRANDTL très grands.

D'une façon très générale, l'ensemble constitué par un domaine $\mathcal{D}_i$ et la solution qui y est valable est, pour un problème donné, caractérisé par l'ensemble des trois paramètres.

$$\xi_i = \frac{\alpha\, L^*_{o,i}}{\psi^*_{o,i}} \quad , \qquad \theta_i = \frac{L^*_{o,i}}{R^*} \quad , \qquad \tau_i = \frac{T^*_{o,i}}{T^*_\infty - T^*_s}$$

Le paramètre ξ_i détermine seul la forme simplifiée des équations vérifiée par l'approximation d'ordre 1 valable dans le domaine $\mathcal{D}_i$.

Dans un domaine $\mathcal{D}_1$ contigu à la goutte et pouvant éventuellement être constitué par tout l'espace extérieur l'approximation d'ordre 1, obtenue pour la valeur nulle de la vitesse à l'infini, a été déterminée au chapitre précédent (Chapitre 1 (16)).

$$\psi^*_1 = \alpha^* R^* \mathrm{Log}(1+B)\ (1+\sigma), \frac{T^*_1 - T^*_s}{T^*_\infty - T^*_s} = \frac{1+B}{B}\left[e^{-\mathrm{Log}(1+B)\frac{R^*}{r^*}} - e^{-\mathrm{Log}\,(1+B)}\right]$$

En particulier $\psi^*_1 = \mathrm{Ord}\,[\alpha^* R^*]$ et $T^*_1 - T^*_s = \mathrm{Ord}\,(T^*_\infty - T^*_s)$

donc $\psi^*_{1,o} = \alpha^* R^*$, $T^*_{o,1} = T^*_\infty - T_s$ et :

(4) $\bar{\psi}_{1,1} = \text{Log}\,(1+B)\,(1+\sigma)$ $\quad \bar{T}_{1,1} = \dfrac{1+B}{B}\left[e^{\frac{-\text{Log}\,(1+B)}{\bar{r}_1}} - e^{-\text{Log}\,(1+B)}\right]$

L'ensemble constitué par le domaine $\mathcal{D}_1$ et la première approximation valable dans ce domaine est caractérisé par les paramètres :

(4') $\boxed{\xi_1 = 1 \quad , \quad \theta_1 = 1 \quad , \quad \tau_1 = 1}$

et le tableau (3) montre que la forme "simplifiée" des équations est en réalité composée de l'équation de NAVIER-STOKES et de l'équation complète de transfert thermique. C'est la symétrie sphérique du problème qui nous a permis de déterminer la première approximation.

D. PROBLEME DE PERTURBATION SINGULIERE : RECHERCHE D'UN DEUXIEME DEVELOPPEMENT

1. Caractéristiques du deuxième domaine

Cette première approximation n'est pas valable dans tout le domaine extérieur à la sphère car les conditions aux frontières concernant la fonction de courant de STOKES ne peuvent être satisfaites. Nous sommes donc confrontés à un problème de perturbation singulière. Nous allons déterminer un domaine $\mathcal{D}_2'$ caractérisé par les paramètres

$$\xi_2 = \frac{\alpha^* L^*_{2,o}}{\psi^*_{2,o}} \quad , \quad \theta_2 = \frac{L^*_{2,o}}{R^*} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{T^*_{2,o}}{T^*_\infty - T^*_s}$$

Dans $\mathcal{D}_2'$ sera valable une forme simplifiée des équations dont la solution, première approximation dans $\mathcal{D}_2'$, satisfera aux conditions aux frontières à l'infini et à des conditions de raccord avec la première approximation dans $\mathcal{D}_1$. Nous allons déterminer cette forme simplifiée. Pour cela, nous examinons les conséquences de l'existence d'un domaine $\mathcal{D}_m$

intermédiaire entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}'_2$ dans lequel les deux développements sont simultanément valables. Supposons d'une manière générale que :

$$\begin{cases} \bar{\psi}_1 = \mathrm{Ord}\left[A_1(\varphi)\,\bar{r}_1^{\,\alpha_1}\right] & \bar{r}_1 \longrightarrow \infty \\ \bar{T}_1 = \mathrm{Ord}\left[B_1(\varphi)\,\bar{r}_1^{\,\beta_1}\right] & \bar{r}_1 \longrightarrow \infty \\ \bar{\psi}_2 = \mathrm{Ord}\left[A_2(\varphi)\,\bar{r}_2^{\,\alpha_2}\right] & \bar{r}_2 \longrightarrow 0 \\ \bar{T}_2 = \mathrm{Ord}\left[B_2(\varphi)\,\bar{r}_2^{\,\beta_2}\right] & \bar{r}_2 \longrightarrow 0 \end{cases}$$

α_1 , β_1 , $A_1(\varphi)$, $B_1(\varphi)$ sont connus et on cherche α_2 , β_2 , $A_1(\varphi)$, $B_2(\varphi)$ en supposant l'existence d'un domaine $\mathcal{D}_m$ de dimension caractéristique $L^*_{m,o}$ où les deux développements sont valables. Nous exprimons le raccord de $\psi^*_{1,o}\,\bar{\psi}_1$ avec $\psi^*_{2,o}\,\bar{\psi}_2$ et de $T^*_{1,o}\,\bar{T}_1$ avec $T^*_{2,o}\,\bar{T}_2$ en écrivant ces quantités en fonction d'une même variable

$$\bar{r}_m = \frac{r^*}{L^*_{m,o}} = \frac{\theta_1}{\theta_m}\,\bar{r}_1 = \frac{\theta'_2}{\theta_m}\,\bar{r}_2 \quad .$$

Il vient :

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{L^*_{1,o}}{\xi_1} A_1(\varphi)\left(\dfrac{\theta_m}{\theta_1}\right)^{\alpha_1} \bar{r}_m^{\,\alpha_1} = \dfrac{L^*_{2,o}}{\xi'_2} A_2(\varphi)\left(\dfrac{\theta_m}{\theta'_2}\right)^{\alpha_2} \bar{r}_m^{\,\alpha_2} \\ T^*_{1,o} B_1(\varphi)\left(\dfrac{\theta_3}{\theta_1}\right)^{\beta_1} \bar{r}_3^{\,\beta_1} = T^*_{2,o} B_2(\varphi)\left(\dfrac{\theta_3}{\theta'_2}\right)^{\beta_2} \bar{r}_3^{\,\beta_2} \end{cases}$$

d'où les conditions :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \quad , \quad \beta_1 = \beta_2 \\ A_1(\varphi) = A_2(\varphi) \quad , \quad B_1(\varphi) = B_2(\varphi) \\ \dfrac{\xi_1}{\xi_2'} \left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\alpha_{1-1}} = 1 \quad , \quad \dfrac{\tau_2'}{\tau_1} \left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\beta_1} = 1 \end{cases}$$

Dans le cas qui nous intéresse $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\theta_1 = 1$, $\xi_1 = 1$, $A_1(\varphi) = 1 + \cos\varphi$, $B_1(\varphi) = 1$, $\tau_1 = 1$. Dans le domaine $\mathcal{D}_2'$, loin de la goutte, la fonction de courant a pour ordre de grandeur $\psi^*_{2,o} = U^*_\infty \, (L^*_{2,o})^2$. Nous déduisons de tout cela les caractéristiques du domaine $\mathcal{D}_2'$.

(5')

$$\boxed{\xi_2' = Pe^{-1/2} \qquad \theta_2' = Pe^{-1/2} \qquad \tau_2' = 1}$$

De plus $A_2(\varphi) = 1 + \cos\varphi \qquad B_2(\varphi) = 1.$

La dimension caractéristique de $\mathcal{D}_2'$ est $R^* Pe^{-1/2}$. Quand la vitesse à l'infini tend vers zéro cette dimension tend vers l'infini. Il en est de même pour le paramètre ξ_2 et la forme simplifiée des équations que vérifie la première approximation dans le domaine $\mathcal{D}_2'$ est nécessairement composée d'une équation de STOKES et d'une équation de conduction pure.

2. Choix d'un petit paramètre

Jusqu'à présent, nous n'avons pas défini le petit paramètre par rapport auquel nous cherchons les différents développements asymptotiques. Nous avons simplement supposé qu'il faisait intervenir la vitesse à l'infini et s'annulait avec elle. Les équations définissant le problème s'écrivent :

Dans le domaine $\mathcal{D}_1$:

$$\begin{cases} \bar{D}_1^4 \bar{\psi}_1 + \dfrac{1}{Pr} (1 - \sigma^2) \bar{\mathfrak{L}}_i (\bar{\psi}_1 , \bar{\psi}_1) = 0 \\ \bar{\nabla}^2 \bar{T}_1 + \dfrac{1}{\bar{r}_1^2} \bar{\mathcal{H}}_1 (\bar{\psi}_1 , \bar{T}_1) = 0 \end{cases}$$

Dans le domaine $\mathcal{D}_2'$:

$$\begin{cases} \bar{D}_2^4 \bar{\psi}_2 + \dfrac{1}{Pr} Pe^{1/2} (1 - \sigma^2)^{-2} (\bar{\psi}_2 , \bar{\psi}_2) = 0 \\ \bar{\nabla}_2^2 \bar{T}_2 + Pe^{1/2} \dfrac{1}{\bar{r}_2^2} \bar{\mathcal{H}}_2 (\bar{\psi}_2 , \bar{T}_2) = 0 \end{cases}$$

Ces équations étant complétées par des conditions aux frontières à la surface de la goutte pour $(\bar{\psi}_1 , \bar{T}_1)$ et à l'infini pour $(\bar{\psi}_2 , \bar{T}_2)$ et par des conditions de raccords aux différents ordres entre les deux développements.

L'examen de ces équations et le désir d'obtenir une forme simplifiée dans $\mathcal{D}_2'$ nécessairement composée d'une équation de STOKES et d'une équation de conduction conduit naturellement à choisir comme petit paramètre le nombre de PECLET de la goutte $Pe = \dfrac{U_\infty^* R^*}{\alpha^*}$ et comme séquence asymptotique 1, $Pe^{1/2}$, Pe etc... éventuellement complétée par des termes en $Pe^k \log Pe$. Il est aisé de déterminer les premières approximations dans les deux domaines.

Dans le domaine $\mathcal{D}_1$:

(6)

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\psi}_{1,1} &= C_{1,1} (1 + \sigma) \\ \bar{T}_{1,1} &= K_{1,1} \left[e^{-\frac{C_{1,1}}{r_1}} - e^{-C_{1,1}} \right] \end{aligned}}$$

avec :

$$\begin{cases} C_{1,1} = \text{Log}\,(1+B) \\ K_{1,1} = \left[1 - e^{-C_{1,1}}\right]^{-1} \end{cases}$$

Dans le domaine $\mathcal{D}_2'$:

(7)

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\psi}_{2,1} &= C_{1,1}\,(1+\sigma) + (\gamma_o^o\,\bar{r}_2 + \bar{r}_2^{\,2})\,\frac{\sigma^2-1}{2} \\ \bar{T}_{2,1} &= 1 \end{aligned}}$$

Remarquons que $\bar{\psi}_{2,1} = \text{Ord}(\bar{r}_2^{\,2})$ $\bar{r}_2 \longrightarrow \infty$. L'ensemble de ces deux solutions valables dans leurs domaines respectifs satisfait aux conditions aux frontières et constitue une première approximation de la solution valable dans tout le domaine extérieur à la goutte.

3. Introduction d'un troisième domaine

Nous pouvons envisager, pour résoudre le problème posé de construire des développements asymptotiques par rapport au nombre de PECLET de la goutte valables respectivement dans les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2'$, et judicieusement raccordés aux différents ordres. Mais, en poursuivant une telle méthode on s'aperçoit qu'il n'est pas possible de construire dans le domaine $\mathcal{D}_2'$ une approximation d'ordre Pe satisfaisant aux conditions aux frontières à l'infini. Ceci montre qu'il n'existe pas de développement asymptotique de la solution valable dans tout le domaine $\mathcal{D}_2'$. A l'intérieur de ce domaine $\mathcal{D}_2'$ nous sommes en présence d'un nouveau problème de perturbation singulière. Ce problème est classique et conduit au paradoxe de WHITEHEAD pour la sphère. Il a été résolu de façon correcte par KAPLUN [4] et l'on est ramené à remplacer la recherche d'un seul développement asymptotique valable dans $\mathcal{D}_2'$ par celle de deux développements valables respectivement dans $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ (avec $\mathcal{D}_2' = \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$) satisfaisant aux conditions aux frontières à l'infini et aux conditions de raccord aux différents ordres entre eux et avec le développement asymptotique valable dans $\mathcal{D}_1$.

$\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ ont pour paramètres caractéristiques :

$\xi_2 = Pe^{-1/2}$	$\theta_2 = Pe^{-1/2}$	$\tau_2 = 1$
$\xi_3 = Pr^{-1}$	$\theta_3 = Pr\ Pe^{-1}$	$\tau_3 = 1$

et cet ensemble de paramètres vérifie des relations analogues à (5) qui s'écrivent ($\alpha = 2$, $\beta = 0$).

$$\frac{\xi_2}{\xi_3}\frac{\theta_2}{\theta_3} = 1 \qquad \frac{\tau_2}{\tau_3} = 1$$

La longueur caractéristique de $\mathcal{D}_3$ est $\frac{\nu^*}{U^*_\infty}$ (ou $\frac{\alpha^*}{U^*_\infty}$ car Pr = Ord(1)) et la première approximation vérifie l'équation de NAVIER-STOKES et l'équation de conduction-convection. La solution de ces équations est constitué par l'écoulement uniforme à température constante première approximation loin de la goutte qui vérifie les conditions à l'infini. Cette première approximation s'écrit (avec $\bar{r}_3 = \frac{r^* U^*}{\alpha^*} = \bar{r}_1 Pe$)

(8)

$$\bar{\psi}_{3,1} = \bar{r}_3^2 \frac{\sigma^2 - 1}{2}$$

$$\bar{T}_{2,1} = 1$$

La première approximation dans le domaine extérieur à la goutte est représenté par l'ensemble des fonctions (6) (7) et (8) qui se raccordent deux à deux et satisfont aux conditions aux frontières. La figure (1) représente l'ensemble des trois fonctions $\bar{\psi}_{1,1}$, $\bar{\psi}_{2,1}$ et $\bar{\psi}_{3,1}$ constituant la première approximation de la fonction de courant.

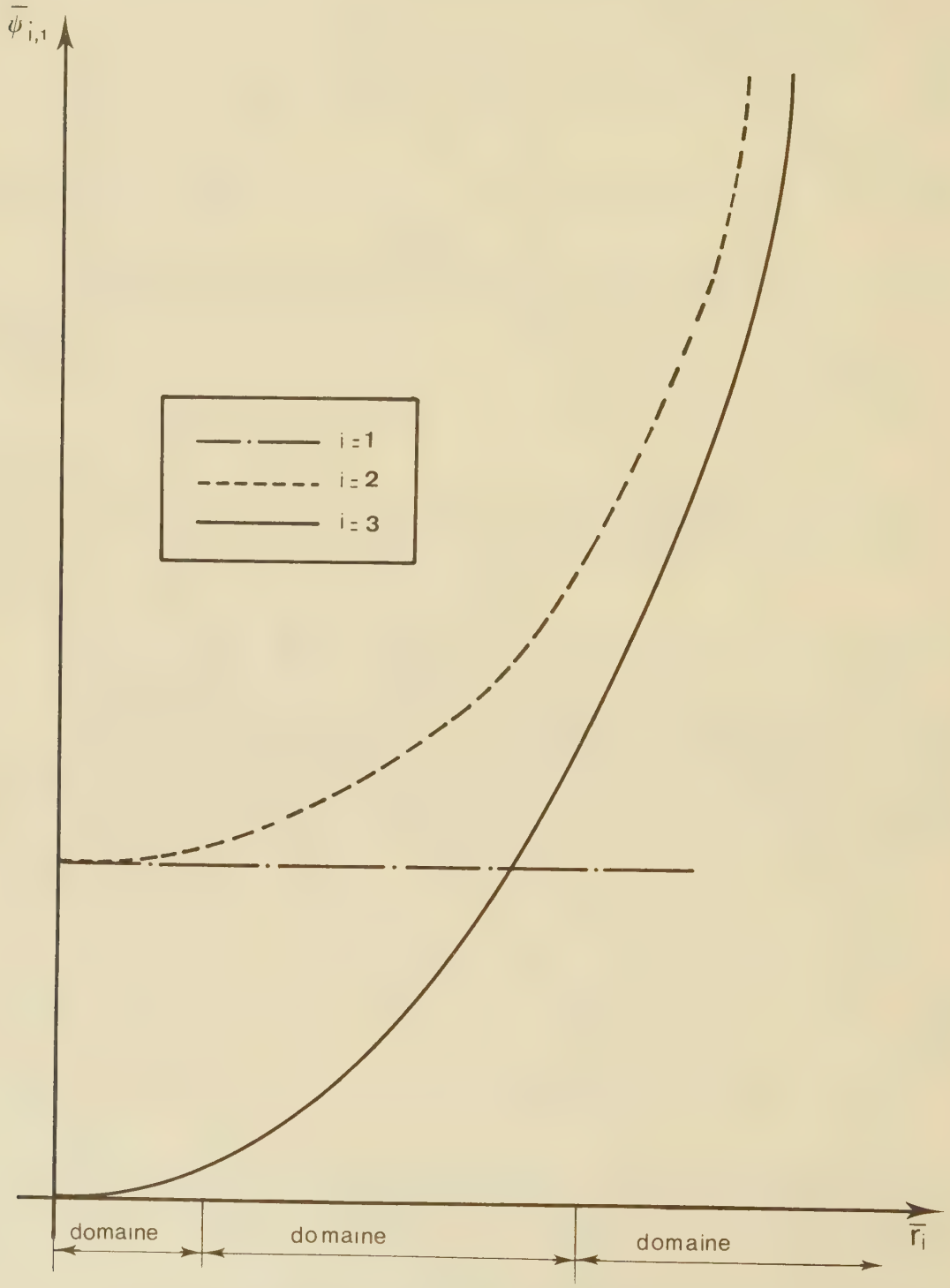


Fig 1: FONCTION DE COURANT (ordre 1)

E. INTERPRETATION PHYSIQUE

La considération des ordres de grandeur des divers termes des équations dans les différents domaines permet une interprétation physique simple de ce schéma de résolution. Raisonnons sur l'équation de température :

$$\alpha^* \nabla_*^2 T^* + \frac{1}{r^{*2}} \mathcal{H}_*(\psi^*, T^*) = 0$$

Dans un domaine $\mathcal{D}_i$ caractérisé par $L^*_{i,o}$, $\psi^*_{i,o}$, $T^*_{i,o}$ le rapport du terme de convection au terme de conduction a pour ordre de grandeur

$$\frac{\text{Terme de convection}}{\text{Terme de conduction}} = \text{Ord}\left[\frac{L^*_{i,o}\, \alpha^*}{\psi^*_{i,o}} \right] = \frac{1}{\xi_i}$$

Dans le domaine $\mathcal{D}_1$, ce rapport vaut 1 ,les deux termes sont du même ordre de grandeur.

Dans le domaine $\mathcal{D}_2$, ce rapport vaut $Pe^{1/2}$. Le terme de conduction est prépondérant quand $Pe \longrightarrow 0$.

Dans le domaine $\mathcal{D}_3$, ce rapport est égal au nombre de PRANDTL. Pour des nombres de PRANDTL d'ordre unité tels ceux que nous considérons les deux termes de conduction et de convection sont du même ordre de grandeur dans le domaine $\mathcal{D}_3$.

Il est donc naturel de diviser le domaine extérieur à la goutte en trois domaines où le transfert thermique a lieu essentiellement par conduction (domaine $\mathcal{D}_2$) ou à la fois par conduction et convection (domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$). On peut faire un raisonnement analogue sur l'équation vérifiée par la fonction de courant de STOKES et voir que dans le domaine $\mathcal{D}_2$ les termes visqueux sont prépondérants et dans les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$, ils sont du même ordre de grandeur que les termes d'inertie. Ceci n'est valable que si $Pr = O(1)$. S'il n'en était pas ainsi, il faudrait introduire un domaine supplémentaire et distinguer entre deux longueurs de références distinctes $\frac{\nu^*}{U^*_\infty}$ et $\frac{\alpha^*}{U^*_\infty}$.

IV - RESOLUTION DES EQUATIONS

A. GENERALITES

Le problème que nous avons envisagé est un problème de perturbation singulière à trois domaines $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ dans lesquels les variables $\bar{r}_1 = \frac{r^*}{R^*}$, $\bar{r}_2 = \bar{r}_1 \sqrt{Pe}$, $\bar{r}_3 = \bar{r}_1 \cdot Pe$ et les fonctions $\bar{\psi}_1 = \frac{\psi^*}{\alpha^* R^*} = \bar{\psi}_2$, $\bar{\psi}_3 = \bar{\psi}_1 Pe$, $\bar{T}_1 = \bar{T}_2 = \bar{T}_3 = \frac{T^* - T^*_s}{T^*_\infty - T^*_s}$ sont respectivement d'ordre unité.

Nous allons construire six développements asymptotiques par rapport au nombre de PECLET de la goutte $\frac{U^*_\infty R^*}{\alpha^*} = Pe$. Ces 6 développements (3 pour la fonction de courant, 3 pour la température) satisferont à des conditions de raccord avec les développements valables dans des domaines contigus et, éventuellement à des conditions aux frontières du problème initial. La séquence asymptotique $\nu_j(Pe)$ sera déterminée progressivement au cours de la résolution. Elle pourra comporter aussi bien des termes en puissances du nombre de PECLET Pe^k que des termes de la forme $Pe^k \log Pe$ que la nature des solutions peut rendre nécessaire pour satisfaire aux conditions de raccord.
Si nous écrivons dans les 3 domaines $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ les équations (2) nous obtenons :

Domaine $\mathcal{D}_1$

$$\begin{cases} \bar{D}_1^4 \bar{\psi}_1 + (1-\sigma^2) Pr^{-1} \bar{\mathcal{L}}_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1) = 0 \\ \bar{\nabla}_1^2 \bar{T}_1 + \frac{1}{\bar{r}_1^2} \bar{\mathcal{H}}_1(\bar{\psi}_1, \bar{T}_1) = 0 \end{cases}$$

Domaine $\mathcal{D}_2$

$$\begin{cases} \bar{D}_2^4 \bar{\psi}_2 + Pe^{1/2}(1-\sigma^2) Pr^{-1} \bar{\mathcal{L}}_2(\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2) = 0 \\ \bar{\nabla}_2^2 T_2 + \frac{Pe^{1/2}}{\bar{r}_2^2} \bar{\mathcal{H}}_2(\bar{\psi}_2, \bar{T}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Domaine } \mathcal{D}_3 \begin{cases} \bar{D}_3^4 \ \bar{\psi}_3 + (1-\sigma^2)\ Pe^{-1}\ \bar{\mathcal{L}}_3\ (\bar{\psi}_3,\ \bar{\psi}_3) = 0 \\ \nabla_3^2\ \bar{T}_3 + \dfrac{1}{\bar{r}_3^2}\ \bar{\mathcal{R}}_3\ (\bar{\psi}_3,\ \bar{T}_3) = 0 \end{cases}$$

et si nous remplaçons dans ces équations $\bar{\psi}_i$ et $\bar{T}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ par leurs développements asymptotiques :

$$\bar{\psi}_i = \sum_{j=1} \bar{\psi}_{i,j} \cdot \nu_j (Pe) \qquad \bar{T}_i = \sum_{j=1} \bar{T}_{i,j}\ \nu_j (Pe)$$

nous obtenons 3 ensembles de systèmes d'équations nous permettant de déterminer en utilisant conditions de raccord et conditions aux frontières les approximations d'ordre ν_j, $\bar{\psi}_{i,j}$ et $\bar{T}_{i,j}$ valables dans le domaine $\mathcal{D}_i$. Ces systèmes sont représentés sur le tableau (9).

Ces équations sont des équations aux dérivées partielles en $\bar{r}_i$ et σ. Des changements de variables et la décomposition des fonctions sur des bases complètes de fonctions orthogonales de σ permettent de se ramener, pour chaque approximation successive, à une suite d'équations différentielles où intervient la seule variable $\bar{r}_i$. Nous utiliserons, pour la température, la base des polynomes de LEGENDRE $P_k(\sigma)$ fonctions propres de l'opérateur ∇^2 et pour la fonction de courant la base des polynomes de GEGENBAUER $Q_k(\sigma) = \int_{-1}^{\sigma} P_k(t)\,dt$ fonctions propres de l'opérateur D^2. L'exploitation des conditions de raccord avec les approximations d'ordre 1 impose les conditions suivantes aux approximations d'ordre ν_j (Pe).

$$\left.\begin{array}{l} \nu\ (Pe)\ \bar{\psi}_{1,j} = \text{Ord}\ (1) \\ \nu_j\ (Pe)\ \bar{T}_{1,j} = \text{Ord}\ (1) \end{array}\right\} \quad Pe \longrightarrow 0 \qquad \bar{r}_2 \text{ fixé}$$

$$\left.\begin{array}{l} \nu_j\ (Pe)\ \bar{\psi}_{2,j} = \text{Ord}\ (1) \\ \nu_j\ (Pe)\ \bar{T}_{2,j} = \text{Ord}\ (1) \end{array}\right\} \quad Pe \longrightarrow 0 \qquad \bar{r}_1 \text{ fixé}$$

	Domaine	Conditions aux limites	Equations
(9),1,1	$\mathcal{D}_1$	$\bar{T}_{1,j}(1,\sigma) = 0$ $\bar{\psi}_{1,j}(1,\sigma) = 0$ $\bar{\psi}_{1,j}(1,\sigma) = B\dfrac{\delta \bar{T}_{1,j}(1,\sigma)}{\delta \bar{r}_1}$	$\bar{D}_1^4\ \bar{\psi}_{1,j} + Pr^{-1}(1-\sigma^2)\sum_{i=1}^{j}\mathcal{L}_1(\bar{\psi}_{1,i}\ \bar{\psi}_{1,j-i+1}) = 0$
(9),1,2			$\nabla_1^2\ \bar{T}_{1,j} + \dfrac{1}{\bar{r}_1^2}\sum_{i=1}^{j}\mathcal{H}_1(\bar{\psi}_{1,i},\ \bar{T}_{1,j-i+1}) = 0$
(9),2,1		Conditions de raccord $\mathcal{D}_1 \rightleftharpoons \mathcal{D}_2$	$\bar{D}_2^4\ \bar{\psi}_{2,j} + Pr^{-1}(1-\sigma^2)\sum_{i=1}^{j-1}\mathcal{L}_2(\bar{\psi}_{2,i},\bar{\psi}_{2,j-i}) = 0$
(9),2,2	$\mathcal{D}_2$		$\nabla_2^2\ \bar{T}_{2,j} + \dfrac{1}{\bar{r}_2^2}\sum_{=}^{j-1}\mathcal{H}_2(\bar{\psi}_{2,i},\ \bar{T}_{2,j-i}) = 0$
(9),3,1		Conditions de raccord $\mathcal{D}_2 \rightleftharpoons \mathcal{D}_3$	$\bar{D}_3^4\ \psi_{3,j} + Pr^{-1}(1-\sigma^2)\sum_{i=1}^{j}\mathcal{L}_3(\bar{\psi}_{3,i},\ \bar{\psi}_{3,j-i+1}) = 0$
(9),3,2	$\mathcal{D}_3$	Lim. $\bar{T}_{3,j} = 1$ $\bar{r}_3 \longrightarrow \infty$ Lim. $\bar{\psi}_{3,j} = \bar{r}_3^2\dfrac{\sigma^2-1}{2}$ $\bar{r}_3 \longrightarrow \infty$	$\nabla_3^2\ \bar{T}_{3,j} + \dfrac{1}{\bar{r}_3^2}\sum_{i=1}^{j}\mathcal{H}_3(\bar{\psi}_{3,i},\bar{T}_{3,j-i+1}) = 0$

TABLEAU (9)

$$\left.\begin{array}{l} Pe\ \nu_j\ \overline{\psi}_{2,j} = Ord\ (1) \\ \nu_j\ (Pe)\ \overline{T}_{2,j} = Ord\ (1) \end{array}\right\} \quad Pe \longrightarrow 0 \qquad \overline{r}_3 \text{ fixé}$$

$$\left.\begin{array}{l} Pe^{-1}\ \nu_j\ (Pe)\ \overline{\psi}_{3,j} = Ord\ (1) \\ \nu_j(Pe)\ \overline{T}_{3,j} = Ord\ (1) \end{array}\right\} \quad Pe \to 0 \qquad \overline{r}_2 \text{ fixé}$$

Nous appelons condition (C_1) l'ensemble de ces conditions de raccord. Nous désignons par $C^k_{i,j}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) les 4 constantes d'intégration intervenant dans la détermination de l'approximation d'ordre ν_j (Pe) de la fonction de courant valable dans le domaine $\mathcal{D}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Nous désignons par $K^k_{i,j}$ ($k=1,2$) les 2 constantes d'intégration intervenant dans la détermination de l'approximation d'ordre ν_j (Pe) de la température valable dans le domaine $\mathcal{D}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Ces constantes seront déterminées par les conditions aux frontières et par les conditions de raccord éventuellement après détermination d'une approximation d'ordre supérieur.

B. DETERMINATION DES APPROXIMATIONS

1. Ordre 1 :

Cette détermination a été effectuée antérieurement.

α/ Domaine $\mathcal{D}_1$:

(10)

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{\psi}_{1,1} = C_{1,1}\ Q_o\ (\sigma) \\ \overline{T}_{1,1} = K_{1,1} \left[e^{-\frac{C_{1,1}}{\overline{r}_1}} - e^{-C_{1,1}} \right] P_o\ (\sigma) \end{array}}$$

où : $\begin{cases} C_{1,1} = \text{Log}\ (1+B) \\ K_{1,1} = \dfrac{1+B}{B} \end{cases}$

Nous poserons $\lambda = C_{1,1} \times K_{1,1}$ $\qquad \mu = C_{1,1}$ (10')

β/ Domaine $\mathcal{D}_2$:

(11)
$$\bar{\psi}_{2,1} = C^1_{2,1}\ Q_o(\sigma) + (C^2_{2,1}\ \bar{r}_2 + \bar{r}_2^2)\ Q_1(\sigma)$$
$$\bar{T}_{2,1} = 1$$

La condition (C_1) impose $C^1_{2,1} = C_{1,1}$ et la constante $C^2_{2,1}$ sera déterminée ultérieurement.

γ/ Domaine $\mathcal{D}_3$:

La solution satisfaisant à la condition (C_2) est :

(12)
$$\bar{\psi}_{3,1} = \bar{r}_3^2 + Q_1(\sigma)$$
$$\bar{T}_{3,1} = 1$$

La forme des équations (9) , 2,1 et (9) , 2,2 nous incite à choisir $v_2(Pe) = Pe^{1/2}$ et nous déterminons cette approximation d'ordre $Pe^{1/2}$.

2. Ordre $Pe^{1/2}$:

α/ Détermination de la température

α - Domaine $\mathcal{D}_3$:

L'approximation d'ordre $Pe^{1/2}$ vérifie l'équation (9),3,2 écrite avec $j = 2$. La solution satisfaisant à (C_2) est :

(13)
$$\bar{T}_{3,2} = 0$$

β - Domaine $\mathcal{D}_2$:

L'approximation $\overline{T}_{2,2}$ vérifie l'équation ⑨,2,2 (j = 2) . La solution satisfaisant à (C_1) s'écrit :

$$\overline{T}_{2,2} = (K_{2,2}^{1} + \frac{K_{2,2}^{2}}{\overline{r}_2}) P_o(\sigma) + K_{2,2}^{3} \overline{r}_2 P_1(\sigma)$$

Le raccord avec $\overline{T}_{3,2}$ entraîne $K_{2,2}^{1} = K_{2,2}^{3} = 0$

Le raccord avec $\overline{T}_{1,1}$ entraîne $K_{2,2}^{2} = -\lambda$

D'où :

⑭
$$\boxed{\overline{T}_{2,2} = -\frac{\lambda}{\overline{r}_2} P_o(\sigma)}$$

γ - Domaine $\mathcal{D}_1$:

Nous déterminons simultanément température et fonction de courant solutions des équations ⑨ ,1,1 et ⑨ ,1,2 écrites pour j = 2 .

Le raccord de $\overline{T}_{1,2}$ avec $\overline{T}_{2,2}$ entraîne $\lim_{\overline{r}_1 \to \infty} \overline{T}_{1,2} = 0$ qui complète les conditions aux frontières écrites en ⑨.

Le système ainsi complété est entièrement homogène et a pour solution :

⑮
$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\psi}_{1,2} &= 0 \\ \overline{T}_{1,2} &= 0 \end{aligned}}$$

Remarquons que le raccord entre $\overline{\psi}_{1,2}$ et $\overline{\psi}_{2,1}$ entraîne $C_{2,1}^{2} = 0$.

b/ Détermination de la fonction de courant

α - Domaine $\mathcal{D}_2$:

La solution vérifiant à la fois la condition (C) et la condition de raccord avec $\overline{\psi}_{1,2}$ est :

$$\overline{\psi}_{2,2} = C^1_{2,2}\ \bar{r}_2^{\,2} + C^2_{2,2}\ \bar{r}_2\ Q_1(\sigma)$$

β - Domaine $\mathcal{D}_3$:

La solution vérifiant les conditions de raccord et la condition à l'infini est :

(16) $$\boxed{\overline{\psi}_{3,2} = 0}$$

Le raccord entre $\overline{\psi}_{3,2}$ et $\overline{\psi}_{2,2}$ impose $C^1_{2,2} = 0$, donc :

(17) $$\boxed{\overline{\psi}_{2,2} = C^2_{2,2}\ \bar{r}_2\ Q_1(\sigma)}$$

La forme des approximations d'ordre $Pe^{1/2}$ suggère de choisir $\nu_3(Pe)=Pe$.

3. Ordre Pe :

a/ Détermination de la température :

α - Domaine $\mathcal{D}_3$

L'équation (9) ,3,2 écrite pour j = 3 a pour solution satisfaisant à la condition (C_4) et à la condition à l'infini :

$$\bar{T}_{3,3} = e^{\bar{r}_3 \frac{\sigma-1}{2}} \frac{\pi}{\bar{r}_3}\left[K^1_{3,3}\ P_o(\sigma) + K^2_{3,3}\left(1+\frac{2}{\bar{r}_3}\right) P_1(\sigma)\right]$$

Le raccord avec $\bar{T}_{2,2}$ impose $K^2_{3,3} = 0$ $\qquad K^1_{3,3} = -\frac{\lambda}{\pi}$.

(18)
$$\boxed{\bar{T}_{3,3} = -\frac{\lambda}{r_3} e^{\bar{r}_3 \frac{\sigma-1}{2}} P_o(\sigma)}$$

β - Domaine $\mathcal{D}_2$:

La solution satisfaisant aux conditions de raccord s'écrit :

(19)
$$\boxed{\bar{T}_{2,3} = \lambda\left(\frac{\mu}{2\,\bar{r}_2^{\,2}} + \frac{1}{2}\right) P_o(\sigma) - \frac{\lambda}{2} P_1(\sigma)}$$

γ - Domaine $\mathcal{D}_1$:

Nous déterminons simultanément température et fonction de courant. Le système constitué par les équations (9) 1,1 et (9) 1,2 écrites pour $j = 3$ est complété par les conditions à la surface de la goutte et par la condition :

$$\lim_{\bar{r}_1 \longrightarrow \infty} \bar{T}_{1,3} = \frac{\lambda}{2}\left[P_o(\sigma) - P_1(\sigma)\right]$$

Si nous posons $\begin{cases} \bar{T}_{1,3} = \sum_{k=o}^{\infty} \bar{T}_{1,3,k}(\bar{r}_1)\ P_k(\sigma) \\ \bar{\psi}_{1,3} = \sum_{k=o}^{\infty} \bar{\psi}_{1,3,k}(\bar{r}_1)\ Q_k(\sigma) \end{cases}$

nous obtenons à partir du système formé des équations (9) 1,1 et (9) 1,2 une suite de systèmes d'équations différentielles qui s'écrivent:

(20)
$$\begin{cases} f''_{1,3,k} - \mu\, Pr^{-1} \left(\dfrac{f_{1,3,k}}{\bar{r}_1^{\,2}} \right)' - k(k+1)\, \dfrac{f_{1,3,k}}{\bar{r}_1^{\,2}} = 0 \\ f_{1,3,k} = \bar{\psi}''_{1,3,k} - k(k+1)\, \dfrac{\bar{\psi}_{1,3,k}}{\bar{r}_1^{\,2}} \\ \left[r_1^2\, \bar{T}'_{1,3,k} \right]' - \mu\, \bar{T}'_{1,3,k} - k(k+1)\, \bar{T}_{1,3,k} = \lambda\, \dfrac{\psi_{1,3,k}}{r_1^2}\, e^{-\frac{\mu}{\bar{r}_1}} \end{cases}$$

avec :

$$\bar{\psi}'_{1,3,k}(1) = 0 \quad , \quad \bar{\psi}_{1,3,k}(1) = B\, \bar{T}'_{1,3,k}(1) \quad , \quad \bar{T}_{1,3,k}(1) = 0$$

$$\forall\, k > 1 : \lim_{\bar{r}_1 \to \infty} \bar{T}_{1,3,k} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\bar{r}_1 \to \infty} \bar{T}_{1,3,0} = \frac{\lambda}{2} \qquad \lim_{\bar{r}_1 \to \infty} \bar{T}_{1,3,1} = -\frac{\lambda}{2}$$

1 - Quel que soit $k > 1$, le problème est entièrement homogène et a pour solution :

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{1,3,k} = 0 \\ \bar{T}_{1,3,k} = 0 \end{cases} \qquad \forall\ k > 1$$

2 - k = 0

La condition de raccord entre $\bar{T}_{1,3}$ et $\bar{T}_{2,3}$ rend le problème non homogène et on trouve aisément : (annexe II.1)

(21)

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{1,3,0} = \dfrac{\mu}{2} \\ \bar{T}_{1,3,0} = \dfrac{\lambda}{2} \cdot e^{-\frac{\mu}{\bar{r}_1}} \left[1 - \dfrac{1}{\bar{r}_1} \right] \end{cases}$$

3 - k = 1

Le problème est de nouveau non homogène en raison de la condition de raccord de la température. La solution s'écrit (voir annexe II,1)

(22)

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{1,3,1} = \dfrac{C^1_{1,3}}{\bar{r}_1} + \bar{r}_1^2 + C^2_{1,3} \; Z\ (\bar{r}_1) \\ \bar{T}_{1,3,1} = K^1_{1,3} \left[\bar{r}_1 - \dfrac{\mu}{2} \right] + K^2_{1,3} \left[\bar{r}_1 + \dfrac{\mu}{2} \right] \cdot e^{-\frac{\mu}{\bar{r}_1}} + Y\ (\bar{r}_1) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} Z\ (r) = r + \alpha_1 + \alpha_2 \dfrac{\text{Log } r}{r} + \displaystyle\sum_{n=3} \dfrac{\alpha_n}{r^{n-1}} \\ Y\ (r) = \displaystyle\sum_n \beta_n r^{-n} + \text{Log } r \sum_n \gamma_n r^{-n} \end{cases}$$

Les coefficients α_n, β_n et γ_n sont donnés dans l'annexe (II.1) ; ils dépendent du nombre de PRANDTL. Y (r) dépend linéairement des constantes $C^1_{1,3}$ et $C^2_{1,3}$.

Les 4 constantes $C^1_{1,3}$, $C^2_{1,3}$, $K^1_{1,3}$, $K^2_{1,3}$ qui interviennent linéairement dans les formules (11) sont déterminées au moyen des 3 conditions à la surface de la sphère et le condition de raccord de la température.

(23)

$$\begin{cases} -C^1_{1,3} + 2 + C^2_{1,3}\, Z'(1) = 0 \\ K^1_{1,3}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + K^2_{1,3}\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) e^{-\mu} + Y(1) = 0 \\ C^1_{1,3} + 1 + C^2_{1,3}\, Z(1) = B\left[K^1_{1,3} + K^2_{1,3}\, e^{-\mu}\left[1 + \mu + \frac{\mu^2}{2}\right] + Y'(1)\right] \\ K^1_{1,3} + K^2_{1,3} = 0 \end{cases}$$

La résolution numérique de ce système linéaire où les inconnues sont $C^1_{1,3}$, $C^2_{1,3}$, $K^1_{1,3}$ et $K^2_{1,3}$ ne présente aucune difficulté et permet, connaissant le nombre de PRANDTL et le paramètre caractéristique de la surchauffe B de déterminer complètement fonction de courant et température à l'ordre Pe au voisinage de la sphère.

(24)

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\psi}_{1,3} &= \overline{\psi}_{1,3,o}\, Q_o(\sigma) + \overline{\psi}_{1,3,1}\, Q_1(\sigma) \\ \overline{T}_{1,3} &= \overline{T}_{1,3,o}\, P_o(\sigma) + \overline{T}_{1,3,1}\, P_1(\sigma) \end{aligned}}$$

où $\overline{\psi}_{1,3,o}$, $\overline{T}_{1,3,o}$, $\overline{\psi}_{1,3,1}$, , $\overline{T}_{1,3,1}$ sont donnés par les formules (21) et (22) .

Nous posons $\boxed{C^{2}_{1,3} = \delta \quad . \quad C^{1}_{1,3} = \zeta}$ (24')

b/ Détermination de la fonction de courant

α - Domaine $\mathcal{D}_2$:

La fonction de courant vérifie l'équation (9) ,2,1 écrite pour j = 3 . La solution satisfaisant à la condition (C_1) et aux conditions de raccord avec les approximations déjà déterminées s'écrit :

$$\boxed{\bar{\psi}_{2,3} = \frac{\mu}{2} + C^{1}_{2,3}.\bar{r}_2 \; Q_o(\sigma) - \frac{\delta Pr^{-1}}{4}\left[(3\mu + C^{2}_{2,3} + \bar{r}_2^{\,2})\, Q_1(\sigma) - r_2^{\,2}\, Q_2(\sigma)\right]} \quad (25)$$

Les constantes $C^{1}_{2,3}$ et $C^{2}_{2,3}$ seront déterminées ultérieurement.

β - Domaine $\mathcal{D}_3$:

L'équation (9) ,3,1 écrite pour j = 3 a pour solution vérifiant (C_1) la condition à l'infini et les conditions de raccord avec les approximations déjà déterminées :

$$\boxed{\bar{\psi}_{3,3} = \left[\mu + \delta \,.\, Pr \left[\bullet^{\;\bar{r}_3\, Pr^{-1}} \;\; \frac{\sigma - 1}{2} \;\; - 1\right]\right] Q_o(\sigma)} \quad (26)$$

Nous avons déterminé dans chacun des domaines $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ les développements asymptotiques par rapport au nombre de PECLET de la fonction de courant et de la température jusqu'à l'ordre Pe inclus. La présence dans les expressions de $\bar{\psi}_{1,3}$ et $\bar{T}_{1,3}$ de termes faisant intervenir la fonction $\text{Log}\ \bar{r}_1$ nous conduit à compléter notre séquence asymptotique par des termes tels que $\tilde{\nu}_j = \text{Pe} \cdot \text{Log Pe}$. Suivant en cela l'ouvrage de Van DYKE M. nous traiterons simultanément les approximations d'ordre $\nu_j = \text{Pe}$ et celles d'ordre $\tilde{\nu}_j = \text{Pe} \cdot \text{Log Pe}$ que nous caractérisons par un signe $\sim$. La forme des approximations d'ordre Pe nous conduit à considérer les approximations d'ordre $\text{Pe}^{3/2} = \nu_4(\text{Pe})$ et $\text{Pe}^{3/2}\ \text{Log Pe} = \tilde{\nu}_4(\text{Pe})$.

4 - Ordres $\text{Pe}^{3/2}$ et $\text{Pe}^{3/2}\ \text{Log Pe}$

La méthode appliquée est la même que pour l'ordre Pe. Nous ne détaillerons pas le raisonnement et donnerons simplement les résultats.

a / Détermination de la température :

α - Domaine $\mathcal{D}_3$:

(27)
$$\bar{T}_{3,4} = \tilde{\bar{T}}_{3,4} = 0$$

β - Domaine $\mathcal{D}_2$:

(28)
$$\bar{T}_{2,4} = -\frac{\lambda}{2}\left[\left[\frac{\mu^3}{3\,\bar{r}_2^{\,3}} + \frac{1+\mu}{\bar{r}_2} + \frac{\bar{r}_2}{3}\right] P_0(\sigma) + \left[\frac{\delta-\mu}{\bar{r}_2} - \frac{\bar{r}_2}{2}\right] P_1(\sigma) + \frac{\bar{r}_2}{6} P_2(\sigma)\right]$$

$$\tilde{\bar{T}}_{2,4} = 0$$

γ - Domaine $\mathfrak{D}_1$:

Nous cherchons à déterminer simultanément fonction de courant et température et nous sommes conduits pour l'ordre $Pe^{3/2}$ et l'ordre $Pe^{3/2} Log\ Pe$ à des problèmes entièrement homogènes ayant pour solutions :

(29)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{T}_{1,4} = 0 & \bar{\psi}_{1,4} = 0 \\ \bar{T}_{1,4} = 0 & \tilde{\bar{\psi}}_{1,4} = 0 \end{array}} \rightarrow C^1_{2,3} = C^2_{2,3} = 0$$

b/ Détermination de la fonction de courant

α - Domaine $\mathfrak{D}_2$:

On trouve après un calcul sans difficultés :

(30)

$$\bar{\psi}_{2,4} = \left(\alpha_2 \frac{Log\ \bar{r}_2}{\bar{r}_2} + \frac{C^1_{1,3}}{\bar{r}_2} + C_{2,4}\,\bar{r}_2 + \frac{\delta\, Pr^{-2}}{20}\,\bar{r}_2^{\,3}\right) Q_1(\sigma)$$

$$-\left(\frac{Pr^{-1}}{} (4\alpha_1 + 2\mu\, Pr^{-1} + 3\delta)\,\bar{r}_2 + \frac{\delta\, Pr^{-2}}{20}\,\bar{r}_2^{\,3}\right) Q_2(\sigma)$$

$$+\left(\frac{Pr^{-2}\delta}{20}\,\bar{r}_2^{\,3}\right) Q_3(\sigma)$$

$$\tilde{\bar{\psi}}_{2,4} = C_{2,4}\,\bar{r}_2 - \frac{\alpha_2 \delta}{2\,\bar{r}_2}\, Q_1(\sigma)$$

Les constantes $C_{2,4}$ et $C_{2,4}$ ne seront déterminées qu'ultérieurement.

β - Domaine $\mathfrak{D}_3$:

On trouve aisément que les seules conditions susceptibles d'être raccordées sont :

(31)

$$\boxed{\bar{\psi}_{3,4} = \tilde{\bar{\psi}}'_{3,4} = 0}$$

La forme des approximations déterminées jusqu'à présent suggère le choix des termes suivants de la séquence asymptotique $\nu_5\,(Pe) = Pe^2$ et $\tilde{\nu}_5\,(Pe) = Pe^2\ Log\ Pe$. Nous traiterons simultanément les approximations correspondantes.

5. Ordres Pe^2 et $Pe^2\ Log\ Pe$:

La méthode reste la même mais les calculs deviennent de plus en plus complexes. Nous n'exposerons ici que quelques indications sur le raisonnement à mettre en oeuvre et nous indiquerons des résultats qui peuvent être obtenus sans une résolution complète dans les trois domaines mais par l'exploitation systématique des conditions de raccord avec les approximations déjà déterminées.

Dans le domaine $\mathfrak{D}_1$, les équations s'écrivent :

(31') Ordre Pe^2

$$\begin{cases} \bar{D}_1^4\,\bar{\psi}_{1,5} + (1-\sigma^2)\left[\bar{\mathfrak{L}}_1\,(\bar{\psi}_{1,0},\,\bar{\psi}_{1,5}) + \bar{\mathfrak{L}}_1\,(\bar{\psi}_{1,3},\bar{\psi}_{1,3})\right] = 0 \\ \bar{\nabla}_1^2\bar{T}_{1,5} + \dfrac{1}{\bar{r}_1^2}\left[\bar{\mathfrak{K}}_1(\bar{\psi}_{1,0},\bar{T}_{1,5}) + \bar{\mathfrak{K}}_1(\bar{\psi}_{1,5},\bar{T}_{1,0}) + \bar{\mathfrak{K}}_1(\bar{\psi}_{1,3},\bar{T}_{1,3})\right] = 0 \end{cases}$$

(31'') Ordre $Pe^2\,Log\,Pe$

$$\begin{cases} \bar{D}_1^4\ \tilde{\bar{\psi}}_{1,5} + (1-\sigma^2)\bar{\mathfrak{L}}_1\,(\bar{\psi}_{1,0},\,\tilde{\bar{\psi}}_{1,5}) = 0 \\ \bar{\nabla}_1^2\,\tilde{\bar{T}}_{1,5} + \dfrac{1}{r_1^2}\left[\bar{\mathfrak{K}}\,(\bar{\psi}_{1,0},\,\tilde{\bar{T}}_{1,5}) + \bar{\mathfrak{K}}\,(\tilde{\bar{\psi}}_{1,5},\,\bar{T}_{1,0})\right] = 0 \end{cases}$$

La décomposition des fonctions inconnues sur les bases des polynômes de GEGENBAUER et de LEGENDRE conduit, pour l'ordre $Pe^2\ Log\ Pe$ à un système exactement identique au système (20) et pour l'ordre Pe^2 à un système

analogue comportant un second membre où interviennent les fonctions $\psi_{1,3}$ et $\bar{T}_{1,3}$. Seules les conditions aux limites diffèrent et s'écrivent pour les équations correspondant aux composantes d'ordre k :

$$\bar{\psi}'_{1,5,k}(1) = 0 \qquad \bar{\psi}_{1,5,k}(1) = B\,\bar{T}'_{1,5,k}(1) \qquad \bar{T}_{1,5,k}(1) = 0$$

$$\tilde{\bar{\psi}}'_{1,5,k}(1) = 0 \qquad \tilde{\bar{\psi}}_{1,5,k}(1) = B\,\tilde{\bar{T}}'_{1,5,k}(1) \qquad \tilde{\bar{T}}_{1,5,k}(1) = 0$$

$$\text{Lim.}_{r_1 \longrightarrow \infty} \bar{T}_{1,5,k}(\bar{r}_1) = H_k(\bar{r}_1) \qquad \text{Lim.}_{r_1 \longrightarrow \infty} \tilde{\bar{T}}_{1,5,k}(\bar{r}_1) = \tilde{H}_k(\bar{r}_1)$$

Le problème réside dans la détermination des fonctions $H_k(\bar{r}_1)$ et $\tilde{H}_k(\bar{r}_1)$. Or, les termes susceptibles d'être raccordés à des termes appartenant à des approximations d'ordre $\nu_5(Pe)$ et $\tilde{\nu}_5(Pe)$ valables dans le domaine $\mathcal{D}_2$ sont nécessairement des constantes où des multiples de $\text{Log}\,\bar{r}_1$. Il en résulte que :

$$\begin{cases} H_k(\bar{r}_1) = D_k^1 + D_k^2 \,\text{Log}\,\bar{r}_1 \\ \tilde{H}_k(\bar{r}_1) = \tilde{D}_k^1 + \tilde{D}_k^2 \,\text{Log}\,\bar{r}_1 \end{cases}$$

Nous cherchons à déterminer les constantes D_k^1 , D_k^2 , $\tilde{D}_k^1$, $\tilde{D}_k^2$.

Ecrite en fonction de la variable $\bar{r}_2$, l'expression $H_k Pe^2 + \tilde{H}_k Pe^2 \,\text{Log}\,Pe$ devient :

$$H_k Pe^2 + \tilde{H}_k Pe^2 \text{Log}\,Pe = (E_k^1 + E_k^2 \,\text{Log}\,\bar{r}_2)\,Pe^2 + (\tilde{E}_k^1 + \tilde{E}_k^2 \text{Log}\,\bar{r}_2)\,Pe^2\,\text{Log}\,Pe + \tilde{\bar{E}}_k^2\,Pe^2\,(\text{Log}\,Pe)^2$$

avec les relations :

$$E_k^1 = D_k^1 \ , \ E_k^2 = D_k^2 \ , \ \tilde{E}_k^1 = \tilde{D}_k^1 - \frac{1}{2} D_k^2 \ , \ \tilde{E}_k^2 = \tilde{D}_k^2 \ , \ \tilde{\tilde{E}}_k^2 = \frac{\tilde{\tilde{D}}_k^2}{2} \ .$$

Nous allons déterminer les constantes E_k^1 , E_k^2 , $\tilde{E}_k^1$, $\tilde{E}_k^2$, $\tilde{\tilde{E}}_k^2$.

1er Cas : $k \geq 1$

Cette détermination est effectuée à partir de l'examen des seconds membres des équations de température écrites dans le domaine $\mathfrak{D}_2$. En effet :

$$\nabla_2^2 \left[(E_k^1 + E_k^2 \ \mathrm{Log}\ r_2)\ P_k(\sigma) \right] = \frac{1}{\bar{r}_2^2} \left[E_k^2 - k\,(k+1)(E_k^1 + E_k^2 \mathrm{Log}\ \bar{r}_2) \right] . P_k(\sigma)$$

et si les seconds membres des équations de température écrites dans $\mathfrak{D}_2$ aux ordres ν_5 (Pe) et $\tilde{\nu}_5$ (Pe) , qui sont des fonctions connues des approximations d'ordre inférieur , sont écrits sous la forme :

$$\text{Ordre } \nu_5 \text{ (Pe)} \ : \frac{1}{\bar{r}_2^2} \left[\Delta_k^1 + \Delta_k^2 \ \mathrm{Log}\ \bar{r}_2 + G(\bar{r}_2) \right] . P_k(\sigma)$$

$$\text{Ordre } \tilde{\nu}_5 \text{ (Pe)} \ : \frac{1}{\bar{r}_2^2} \left[\tilde{\Delta}_k^1 + \tilde{\Delta}_k^2 \ \mathrm{Log}\ \bar{r}_2 + \tilde{G}(\bar{r}_2) \right] . P_k(\sigma)$$

Il en résulte immédiatement que :

$$E_k^1 = -\frac{1}{k\,(k+1)} \left[\Delta_k^1 + \frac{\Delta_k^2}{k\,(k+1)} \right] \qquad \tilde{E}_k^1 = -\frac{1}{k\,(k+1)} \left[\tilde{\Delta}_k^1 + \frac{\tilde{\Delta}_k^2}{k\,(k+1)} \right]$$

$$E_k^2 = -\frac{\Delta_k^2}{k\,(k+1)} \qquad \tilde{E}_k^2 = -\frac{\tilde{\Delta}_k^2}{k\,(k+1)}$$

L'examen des seconds membres montre facilement que :

$$\begin{cases} \Delta_k^2 = \tilde{\Delta}_k^1 = \tilde{\Delta}_k^2 = 0 & \forall k \geq 1 \\ \Delta_1^1 \neq 0 \quad \Delta_2^1 \neq 0 \quad \Delta_k^1 = 0 & \forall k > 2 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} E_k^2 = \tilde{E}_k^2 = \tilde{\tilde{E}}_k^2 = \tilde{E}_k^1 = 0 & \forall k \geq 1 \\ E_1^1 \neq 0 \,, \quad E_2^1 \neq 0 \,, \quad E_k^1 = 0 & \forall k > 2 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} D_k^2 = \tilde{D}_k^2 = \tilde{D}_k^1 = 0 & \forall k \geq 1 \\ D_1^1 \neq 0 \,, \quad D_2^1 \neq 0 \,, \quad D_k^1 = 0 & \forall k > 2 \end{cases}$$

et :

$$H_1 \neq 0 \,, \; H_2 \neq 0 \,, \; H_k = 0 \qquad \forall k > 2$$
$$\tilde{H}_k = 0 \qquad \forall k > 0$$

Ceci n'est valable que si k est non nul.

2ème Cas : $k = 0$

La méthode précédente n'est plus applicable et il est nécessaire, pour obtenir les constantes D_o^1 , D_o^2 , $\tilde{D}_o^1$, $\tilde{D}_o^2$ intervenant dans $H_o(\bar{r}_1)$ et $\tilde{H}_o(\bar{r}_1)$, d'examiner les approximations d'ordre ν_5 (Pe) et $\tilde{\nu}_5$ (Pe) valables dans le domaine $\mathfrak{D}_3$ et susceptibles d'être raccordées.

De la même façon qu'à l'ordre $\tilde{\nu}_4$ (Pe) = $Pe^{3/2}$ Log Pe, on montre immédiatement que :

(32)

$$\boxed{\tilde{\tilde{\psi}}_{3,5} = \tilde{\tilde{T}}_{3,5} = 0}$$

constitue la seule solution susceptible d'être raccordée. Il est aisé de vérifier que si :

$$\lim_{\bar{r}_3 \longrightarrow 0} \bar{T}_{3,5}(\bar{r}_3) = \Delta_o^1 + \Delta_o^2 \operatorname{Log} \bar{r}_3$$

ceci entraîne dans le domaine $\mathfrak{D}_1$:

$$H_o(\bar{r}_1) = \Delta_o^1 + \Delta_o^2 \operatorname{Log} r_1 \text{ et } \quad \tilde{H}_o(\bar{r}_1) = \Delta_o^2$$

La détermination des constantes Δ_o^1 et Δ_o^2 est effectuée dans l'annexe II,3 . Ces constantes dépendent directement du nombre de PRANDTL et indirectement du paramètre B par l'intermédiaire de λ , μ et δ . On trouve :

$$\begin{cases} \Delta_o^1 = \Delta_o^1 \ (B, Pr) & \text{(expression donnée dans l'annexe II,3)} \\ \Delta_o^2 = -\dfrac{\lambda\,\delta}{3} \end{cases}$$

Les fonctions $H_k(\bar{r}_1)$ et $\tilde{H}_k(\bar{r}_1)$ ayant été déterminées pour toute valeur de k , l'intégration des systèmes d'équations résultant de la décomposition des systèmes (31') et (31'') est maintenant possible : On trouve immédiatement :

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{1,5,k} = \bar{T}_{1,5,k} = 0 & \forall\, k > 2 \\ \tilde{\bar{\psi}}_{1,5,k} = \tilde{\bar{T}}_{1,5,k} = 0 & \forall\, k > 0 \end{cases}$$

On peut en utilisant l'annexe II.1 déterminer $\bar{\psi}_{1,5,o}$ et $\bar{T}_{1,5,o}$, $\tilde{\bar{\psi}}_{1,5,o}$ et $\tilde{\bar{T}}_{1,5,o}$.

Les deux dernières fonctions sont déterminées analytiquement. On trouve :

(33)
$$\begin{cases} \tilde{\bar{\psi}}_{1,5,o} = -\dfrac{\mu\,\delta}{3} \\ \tilde{\bar{T}}_{1,5,o} = -\dfrac{\lambda\,\delta}{3}\, e^{-\frac{\mu}{\bar{r}_1}} \left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{\bar{r}_1}}\right] \end{cases}$$

La complexité des seconds membres des équations différentielles rend impossible une détermination analytique de $\bar{\psi}_{1,5,o}$ et $\bar{T}_{1,5,o}$. Une résolution numérique a été effectuée selon la méthode indiquée dans l'annexe II.1 .

6. Conclusion

Dans $\mathcal{D}_1$, nous avons déterminé jusqu'à l'ordre Pe^2 inclus la composante de rang zéro de la température qui s'écrit :

(34)
$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \bar{T}_1 \, d\sigma = \bar{T}_{1,1,o} + \bar{T}_{1,3,o}\, Pe + \tilde{\bar{T}}_{1,5,o} Pe^2 \text{Log } Pe + \bar{T}_{1,5,o} Pe^2 + O\,(Pe^3 \text{ Log } Pe)$$

et nous avons déterminé jusqu'à l'ordre $Pe^2 \text{Log } Pe$ inclus la fonction de courant de STOKES qui s'écrit :

(35)
$$\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_{1,1,o} Q_o(\sigma) + \left(\bar{\psi}_{1,3,o} Q_o(\sigma) + \bar{\psi}_{1,3,1} Q_1(\sigma)\right) Pe + \tilde{\bar{\psi}}_{1,5,o} Q_o(\sigma)\, Pe^2 \text{Log } Pe + O\,(Pe^2)$$

V - RESULTATS

La connaissance des développements asymptotiques de la fonction de courant et de la température dans le domaine $\mathcal{D}_1$ contigu à la goutte va nous permettre de déterminer le nombre de NUSSELT de la goutte jusqu'à l'ordre Pe^2 inclus et le coefficient de traînée jusqu'à l'ordre Pe inclus.

A - DETERMINATION DU NOMBRE DE NUSSELT

$$Nu = \frac{2.\,R^*\,h}{K^*} = \frac{1}{2\pi\,R^*\,K^*\,(T_\infty^* - T_S^*)} \int k^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}(R^*)\,ds$$

L'intégrale étant étendue à la surface de la goutte.

En fonction des variables adimensionnelles définies dans le domaine $\mathcal{D}_1$, cette expression devient :

$$Nu = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{r}_1}(1,\sigma)\,d\sigma$$

Or :

$$T_1 = \sum\sum_{k} \bar{T}_{1,j,k}(\bar{r}_1)\,P_k(\sigma)\;\nu_j(Pe)$$

Donc :

$$Nu = \sum_j \sum_k \bar{T}'_{1,j,k}(1) \int_{-1}^{+1} P_k(\sigma)\,d\sigma\;\nu_j(Pe)$$

et :

$$\boxed{Nu = 2.\sum_j \bar{T}'_{1,j,o}(1)\;\nu_j(Pe)} \qquad (36)$$

B - DETERMINATION DU COEFFICIENT DE TRAINEE

La résultante des forces qui s'exercent sur la goutte est par raison de symétrie parallèle à la vitesse à l'infini de la vapeur par rapport à la goutte. Elle a pour valeur :

$$F = 2\pi \int_0^{\pi} \left[\left(-\rho v_r^{*2} - p^* + 2\eta^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*}\right)_{r^*=R^*} \cos\varphi - \eta \left(\frac{\partial v_\varphi^*}{\partial r^*} - \frac{v_\varphi^*}{r^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial v_r^*}{\partial \varphi}\right)_{r^*=R^*} \sin\varphi \right]$$

$$\times R^2 \sin\varphi \; d\varphi$$

A la surface de la goutte $v_\varphi^* = 0$ et, en utilisant la fonction de courant de STOKES ψ^* , on arrive à :

$$F = 2\pi \int_{-1}^{+1} \left[\left[-\frac{\rho^*}{r^{*4}} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \sigma}\right)^2 - p^* + 2\eta^* \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial \psi^*}{\partial \sigma}\right) \right] \sigma \right]_{r^*=R^*} - \eta^* \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*}\right) - \frac{1-\sigma^2}{r^{*3}} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \sigma^2} \right]_{r^*=R^*} \times R^2 \, d\sigma$$

Au moyen des variables adimensionnelles définies dans le domaine $\mathfrak{D}_1$ et en posant $\bar{p}_1 = \dfrac{p^* \; R^{*2}}{\eta^* \cdot \psi^*_{1,o}}$, nous sommes conduits à l'expression suivante dans laquelle nous avons utilisé le fait que la vitesse tangentielle de la vapeur est nulle à la surface de la goutte.

$$F = 2\pi\eta\alpha \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \sigma^2}(1,\sigma) - \left[Pr^{-1} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \sigma}(1,\sigma)\right)^2 + \bar{p}_1 (1,\sigma) + \frac{4\partial \bar{\psi}_1}{\partial \sigma}(1,\sigma) \right] \sigma - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \sigma^2}(1,\sigma) - \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \sigma^2}(1,\sigma)\, \sigma^2 \right] d\sigma$$

Posons : $F = F_1 + F_2 + F_3$

$F_1 = 2\pi\eta^*\alpha^* \int_{-1}^{+1} \frac{-}{\tau} p_1 (1,\sigma)\, \sigma \, d\sigma$ représente la résultante des forces de pression s'exerçant à la surface de la goutte.

$F_2 = 2\pi\eta^*\alpha^* \int_{-1}^{+1} -Pr^{-1} \left(\frac{\delta \psi_1}{\delta \sigma} (1,\sigma)\right)^2 \sigma \, d\sigma$ représente la résultante des forces dues au transfert de masse à la surface de la goutte.

$F_3 = F - F_1 - F_2$ représente la résultante des forces de frottement à la surface de la goutte. Nous allons déterminer successivement ces trois quantités F_1, F_2, F_3 .

1. Terme de pression

La détermination de la pression à la surface de la goutte est effectuée à partir de la composante tangentielle de l'équation de NAVIER-STOKES écrite sous forme adimensionnelle en tenant compte de la nullité de la vitesse tangentielle.

$$\frac{-\delta \bar{p}_1}{\delta \sigma} (1,\sigma) = -\frac{Pr^{-1}}{1-\sigma^2} \frac{\delta \bar{\psi}_1}{\delta \sigma}(1,\sigma) \frac{\delta^2 \bar{\psi}_1}{\delta r_1^2}(1,\sigma) + \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\delta^3 \bar{\psi}_1}{\delta r_1^3}(1,\sigma) - 2\frac{\delta^2 \bar{\psi}_1}{\delta \sigma^2}(1,\sigma)$$

$$F_1 = 2\pi\eta^*\alpha^* \int_{-1}^{-1} -\bar{p}_1 \sigma \, d\sigma = \left[\left[\frac{1-\sigma^2}{2} \bar{p}_1\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{1-\sigma^2}{2} \frac{\delta \bar{p}_1}{\delta \sigma} d\sigma\right] 2\pi\eta^*\alpha^*$$

Donc :

$$F_1 = 2\pi\eta^*\alpha^* \int_{-1}^{+1} \left[\frac{-Pr^{-1}}{2} \frac{\delta \bar{\psi}_1}{\delta \sigma}(1,\sigma) \frac{\delta^2 \bar{\psi}_1}{\delta r_1^2}(1,\sigma) + \frac{1}{2} \frac{\delta^3 \bar{\psi}_1}{\delta r_1^3}(1,\sigma) - (1-\sigma^2) \frac{\delta^2 \bar{\psi}_1}{\delta \sigma^2}(1,\sigma) \right] d\sigma$$

Si :

$\bar{\psi}_1 = A_o(\bar{r}_1) + A_1(\bar{r}_1)\sigma + A_2(\bar{r}_1)\sigma^2 + A_3(\bar{r}_1)\sigma^3$, on trouve :

(37)

$$F_1 = 2\pi\eta^*\alpha^* \left[A_o'''(1) + \frac{A_2'''(1)}{3} - \frac{8}{3}A_2(1) - Pr^{-1}(A_1(1)\,A_o''(1) + \frac{1}{3}(A_2''(1)A_1(1) + 2\,A_2(1)A_1''(1) + 3\,A_3(1)\,A_o''(1) + \frac{1}{5}(3\,A_3(1)\,A_2''(1) + 2\,A_2(1)\,A_3''(1)) \right]$$

2. Terme de transfert de masse :

$$F_2 = 2\pi\eta^*\alpha^* \int_{-1}^{+1} -Pr^{-1} \left(\frac{\delta \bar{\psi}_1}{\delta \sigma}(1,\sigma) \right)^2 \sigma \, d\sigma$$

Si on pose de nouveau $\bar{\psi}_1 = A_o(\bar{r}_1) + A_1(\bar{r}_1)\sigma + A_2(\bar{r}_1)\sigma^2 + A_3(\bar{r}_1)\sigma^3$

il vient immédiatement :

(38)
$$F_2 = -2\pi\eta^*\alpha^* \,..\, Pr^{-1}\left[\frac{8}{3}A_1(1)\,A_2(1) + \frac{24}{5}A_2(1)\,A_3(1)\right]$$

3. Terme de frottement :

$$F_3 = 2\pi\eta^*\alpha^* \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\delta^2 \bar{\psi}_1}{\delta \sigma^2}(1,\sigma) - \frac{\delta^2 \bar{\psi}_1}{\delta r_1^2}(1,\sigma) - \frac{4\delta \bar{\psi}_1}{\delta \sigma}(1,\sigma)\sigma - \frac{\delta^2 \bar{\psi}_1}{\delta \sigma^2}(1,\sigma)\,\sigma^2\right] d\sigma$$

En posant encore $\psi_1 = A_o(\bar{r}_1) + A_1(\bar{r}_1)\,\sigma + A_2(\bar{r}_1)\,\sigma^2 + A_3(\bar{r}_1)\,\sigma^3$

on trouve :

(39)
$$F_3 = -2\pi\eta^*\alpha^*\left[2\,A_o''(1) + \frac{8}{3}A_2(1) + \frac{2}{3}A_2''(1)\right]$$

C. RESULTATS

1. Nombre de NUSSELT

En utilisant dans la formule (36) l'expression (34) de la composante de rang zéro de la température dans le domaine $\mathfrak{D}_{1'}$ on obtient immédiatement :

$$(40)\quad Nu = \frac{2\ \mathrm{Log}\ (1+B)}{B}\left[1 + \frac{Pe}{2} - \frac{\delta(B,Pr)}{3}\,Pe^2 \mathrm{Log}\ Pe + \epsilon(B,Pr)\,Pe^2 + \right.$$
$$\left. + O\,(Pe^3\ \mathrm{Log}\ Pe)\right]$$

La fonction $\delta(B,Pr)$ a été déterminée en résolvant numériquement le système linéaire (23") ($\delta = c_{1,3}^2$) .

La fonction $\epsilon(B,Pr)$ est déterminée numériquement en appliquant la méthode exposée dans l'annexe II,1 à la détermination de $\overline{T}_{1,5,o}$.

Les figures 2 et 3 présentent les variations en fonction de B des fonctions $\delta(B,Pr)$ et $\epsilon(B,Pr)$. On retrouve pour les valeurs B = 0 et Pr = 1 les résultats de GUPALO. Yu. P et RYAZANTSEV. Yu. S [12] correspondent au transfert thermique autour d'une sphère sans transfert de masse.

$$-\frac{\delta(0,1)}{3} = \frac{1}{2} \qquad \epsilon(0,1) = 0.592$$

La figure 4 présente la variation en fonction de B du nombre de NUSSELT pour différentes valeurs du nombre de PECLET.

2. Coefficient de traînée

La formule (35) correspond avec les notations du paragraphe V-B à :

$$A_o = \overline{\psi}_{1,1,o} + Pe\ \overline{\psi}_{1,3,o} - \frac{1}{2}\ \overline{\psi}_{1,3,1} + \overline{\overline{\psi}}_{1,5,o}\ Pe^2 Log\ Pe + O(Pe^2)$$

$$A_1 = \overline{\psi}_{1,1,o} + Pe\ \overline{\psi}_{1,3,o} + \overline{\overline{\psi}}_{1,5,o}\ Pe^2\ Log\ Pe + O(Pe^2)$$

$$A_2 = Pe \cdot \frac{1}{2}\ \overline{\psi}_{1,3,1} + O(Pe^2)$$

$$A_3 = 0$$

En remplaçant les fonctions $\overline{\psi}_{i,j,k}$ et $\overline{\overline{\psi}}_{i,j,k}$ par leurs expressions calculées au paragraphe IV (Formules (10) à (32)) et en utilisant les formules (37) à (39), on arrive immédiatement à :

$$\begin{cases} F_1 = -\dfrac{2\pi\eta^*\alpha^* Pe}{3}\Big(4 - 2\zeta(B,Pr) + \delta(B,Pr)\,(Z'''(1) + 4Z'(1)) - \\ \qquad - Pr^{-1}\,(2\,\zeta(B,Pr) + 2 + \delta(B,Pr)Z'(1)\Big) + O(Pe^2) \\ F_2 = -\dfrac{2\pi\eta^*\alpha^*}{6} Pe.Pr^{-1}\ \Big(\zeta(B,Pr) + 2 + \delta(B,Pr)\ Z(1)\Big)\mu(B) + O(Pe^2) \\ F_3 = -\dfrac{2\pi\eta^*\alpha^* Pe}{3}\ \Big(4\ Z(1) - 2\ Z''(1)\Big)\ \delta(B,Pr) + O(Pe^2) \end{cases}$$

Les résultantes des forces s'exerçant sur la goutte sont ainsi calculées jusqu'à l'ordre Pe^2 Log Pe inclus.

Les fonctions $\delta(B,Pr)$ et $\zeta(B,Pr)$ ont été déterminées en résolvant numériquement le système (23) ($\zeta = C^1_{1,3}$, $\delta = C^2_{1,3}$).

Les fractions du coefficient de traînée C_D de la goutte C_{DP} , C_{DM} , C_{DF} correspondant respectivement aux forces de pression F_1 , de transfert de masse F_2 et de cisaillement F_3 sont alors calculés. En divisant ces différents termes par C_{DS} , coefficient de traînée de STOKES correspondant à un écoulement isotherme sans transfert de masse, on obtient :

$$\frac{C_{DP}}{C_{DS}} = \frac{1}{9}\left(2\zeta - \delta\left(Z'''(1) + 4Z'(1)\right) - 4 + Pr^{-1}\left(2\zeta + 2 + \delta Z''(1)\ \mathrm{Log}(1+B)\right)\right) + \mathrm{Ord}\ (Pe)$$

$$\frac{C_{DM}}{C_{DS}} = -\frac{4\ Pr^{-1}}{9}\left(\zeta + 2 + \delta Z(1)\ \mathrm{Log}\ (1+B)\right) + \mathrm{Ord}\ (Pe)$$

(41)

$$\frac{C_{DF}}{C_{DS}} = \frac{\delta}{9}\left(2\ Z''(1) - 4\ Z(1)\right) + \mathrm{Ord}(Pe)$$

$$\frac{C_D}{C_{DS}} = \frac{C_{DP} + C_{DM} + C_{DF}}{C_{DS}}$$

Les figures 5 - 8 présentent pour plusieurs valeurs du nombre de PRANDTL les variations en fonction du paramètre B des 4 fonctions :

$\frac{C_{DP}}{C_{DS}}$, $\frac{C_{DM}}{C_{DS}}$, $\frac{C_{DF}}{C_{DS}}$, $\frac{C_D}{C_{DS}}$ écrites à l'ordre Pe Log Pe inclus.

Pour la valeur zéro de B , on retrouve bien les valeurs

$\frac{C_{DP}}{C_{DS}} = \frac{1}{3}$, $\frac{C_{DM}}{C_{DS}} = 0$, $\frac{C_{DF}}{C_{DS}} = \frac{2}{3}$, $\frac{C_D}{C_{DS}} = 1$ qui correspondent à un écoulement isotherme sans transfert de masse.

Remarque : Les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont colinéaires à $\vec{U_\infty}$ et de même sens. La force $\vec{F_2}$ résultant du transfert de masse est colinéaire à $\vec{U_\infty}$ de même sens pour les faibles valeurs de B et de sens opposé pour les fortes valeurs de B (Figure 9).

VI - CONCLUSION

Le problème complexe de l'évaporation d'une goutte de liquide dans un écoulement de vapeur surchauffée est, dans le cadre des hypothèses précisées au moyen des résultats du premier chapitre, susceptible d'une résolution semi-analytique. Ce problème est un problème de perturbation singulière et peut être analysé au moyen de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Le paramètre intervenant dans ces développements est le nombre de PECLET caractéristique de l'état instantané de la goutte. Un schéma de résolution faisant appel à deux développements asymptotiques raccordés n'est valable qu'en l'absence de transfert de masse ou pour de très grandes valeurs du nombre de PRANDTL de la vapeur ; dans le cas envisagé ici, il est nécessaire de prendre en compte trois développements asymptotiques raccordés et le schéma envisagé est susceptible d'une interprétation physique cohérente.

L'application de cette méthode nous a permis d'obtenir des approximations de la fonction de courant de STOKES et de la température à partir desquelles nous avons pu déterminer le nombre de NUSSELT de la goutte jusqu'à l'ordre Pe^2 inclus.

$$Nu = \frac{2\ Log(1+B)}{B}\left[1+\frac{Pe}{2} - \frac{\delta(B,Pr)}{3}Pe^2 Log\ Pe + \epsilon(B,Pr)Pe^2\right] + O\ (Pe^3 Log\ Pe)$$

Les fonctions $\delta(B\ ,\ Pr)$ et $\epsilon(B,\ Pr)$ sont déterminées numériquement. Lorsque le paramètre de surchauffe B s'annule (absence de transferts de masse), on retrouve les résultats obtenus par GUPALO Yu et RYAZANTSEV Yu. L'évaporation a pour résultat de diminuer le nombre de NUSSELT. Le coefficient de traînée est obtenu à l'ordre $Pe^2 Log\ Pe$ inclus :

$$C_D = C_{DP} + C_{DM} + C_{DF} \qquad \text{(formule (41))}$$

Il se compose de trois termes correspondant aux forces de pression de transfert de masse et de frottement. La détermination de ces différents termes fait intervenir des fonctions $\delta(B, Pr)$, $\zeta(B,Pr)$ qui sont déterminées numériquement. Lorsque le paramètre de surchauffe B s'annule on retrouve les résultats de STOKES. L'évaporation a pour effet de diminuer le coefficient de traînée total à partir de la valeur de STOKES. Le terme de pression reste pratiquement constant et le terme de frottement diminue lorsque la surchauffe augmente. Lorsque le transfert de masse est faible, il entraîne une faible augmentation de la résistance à l'avancement ($C_{DM} > 0$). Lorsqu'il devient plus important, il entraîne une diminution de cette même résistance ($C_{DM} < 0$).

Les formules obtenues sont valables pour de faibles valeurs du nombre de PECLET (ou du nombre de REYNOLDS si l'on considère des nombres de PRANDTL d'ordre unité). La méthode utilisée ne permet pas de déterminer la borne supérieure du domaine de validité d'une telle analyse. La comparaison avec l'expérience peut éventuellement permettre de préciser ce point.

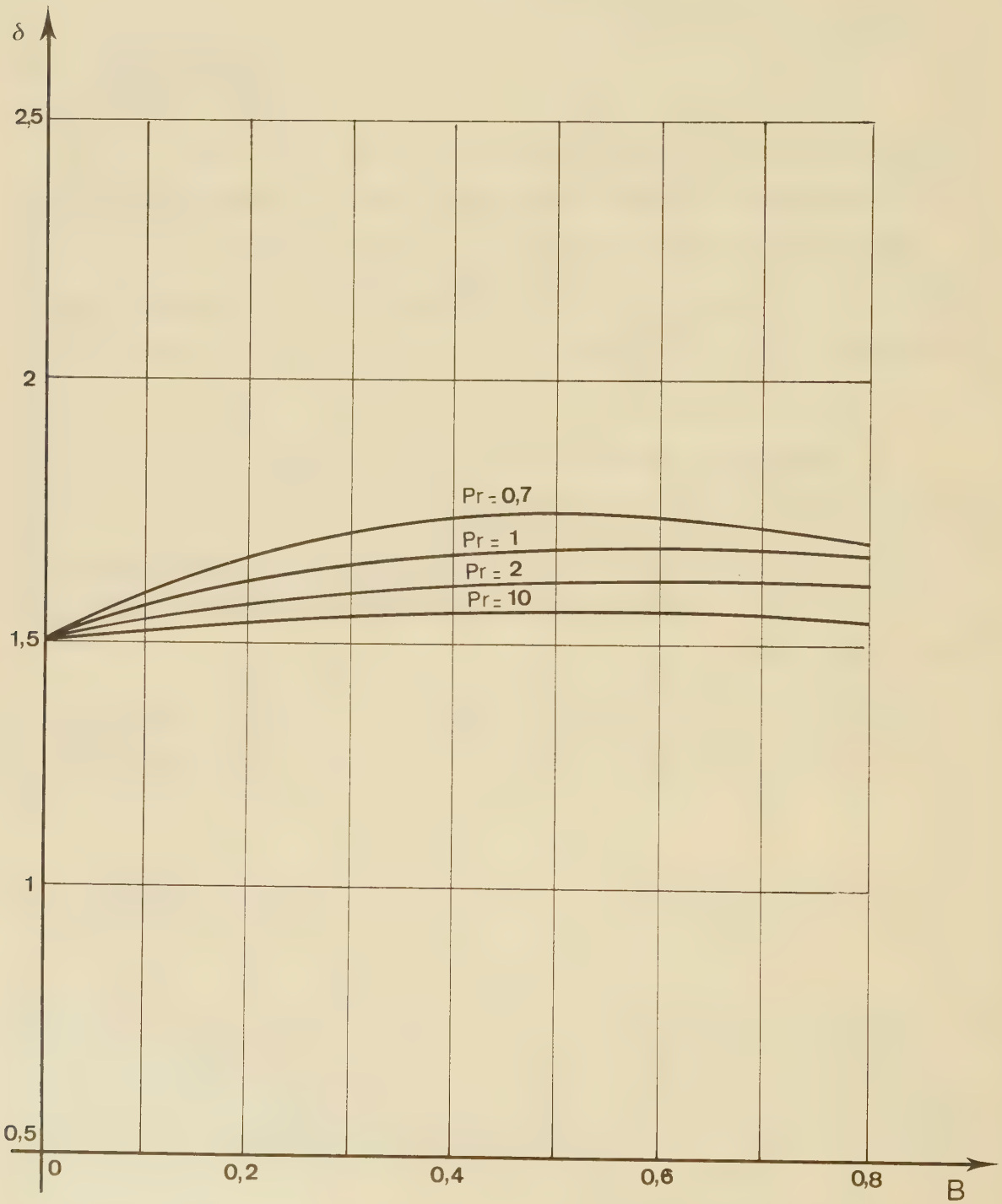


Fig 2 : NOMBRE DE NUSSELT (ordre $Pe^2 \log Pe$)

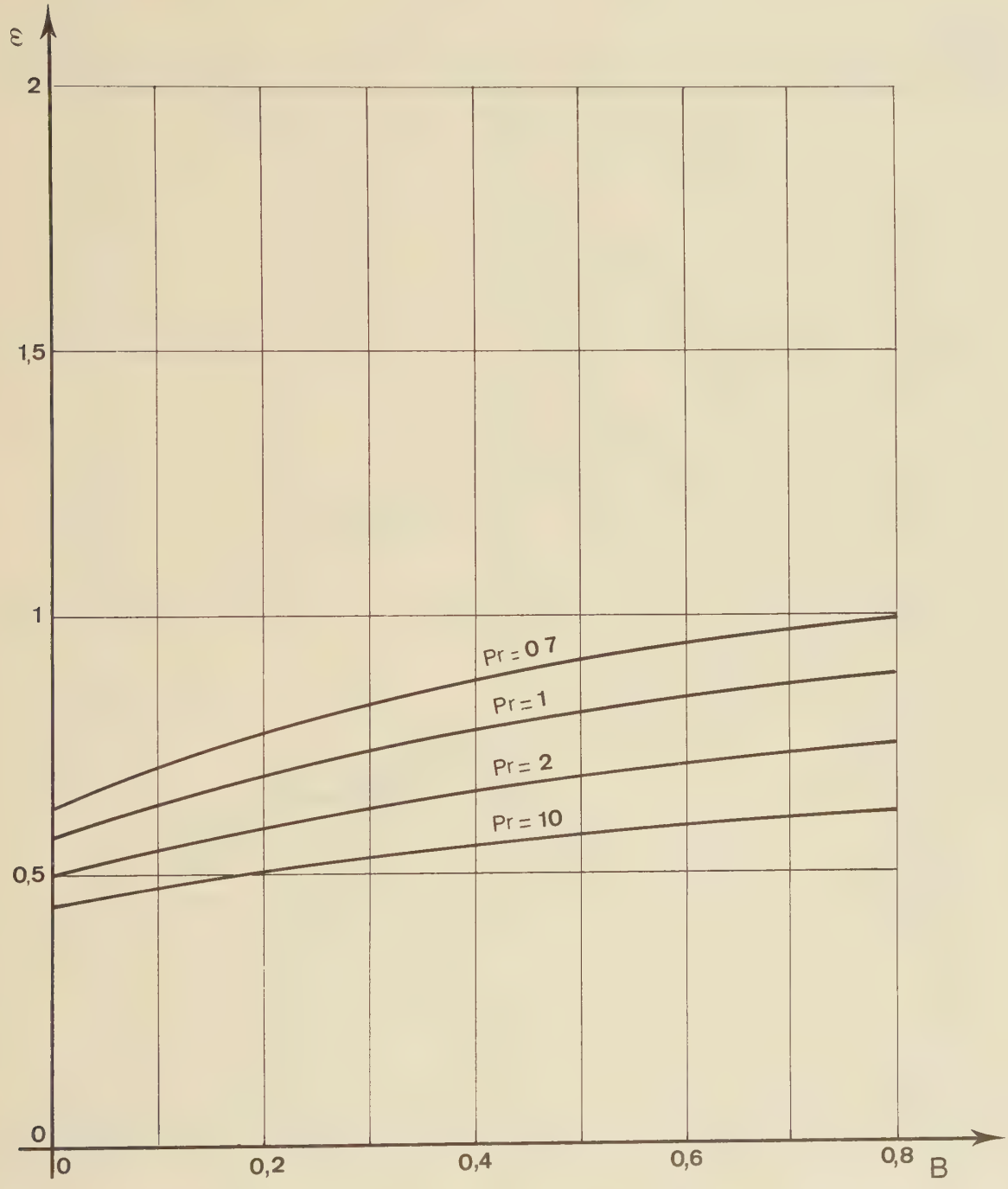


Fig 3 : NOMBRE DE NUSSELT (ordre Pe^2)

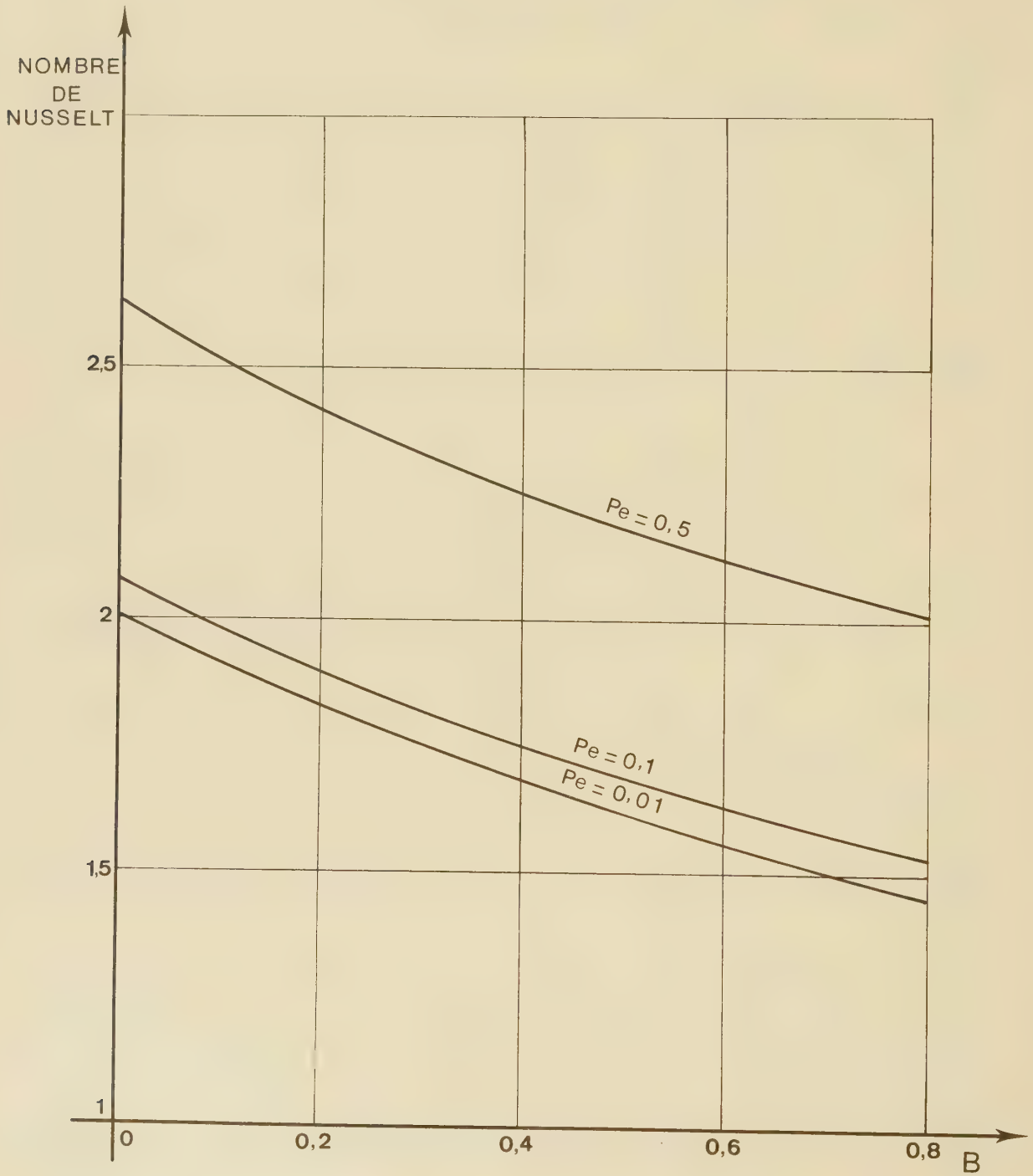


Fig 4 : VARIATION DU NOMBRE DE NUSSELT

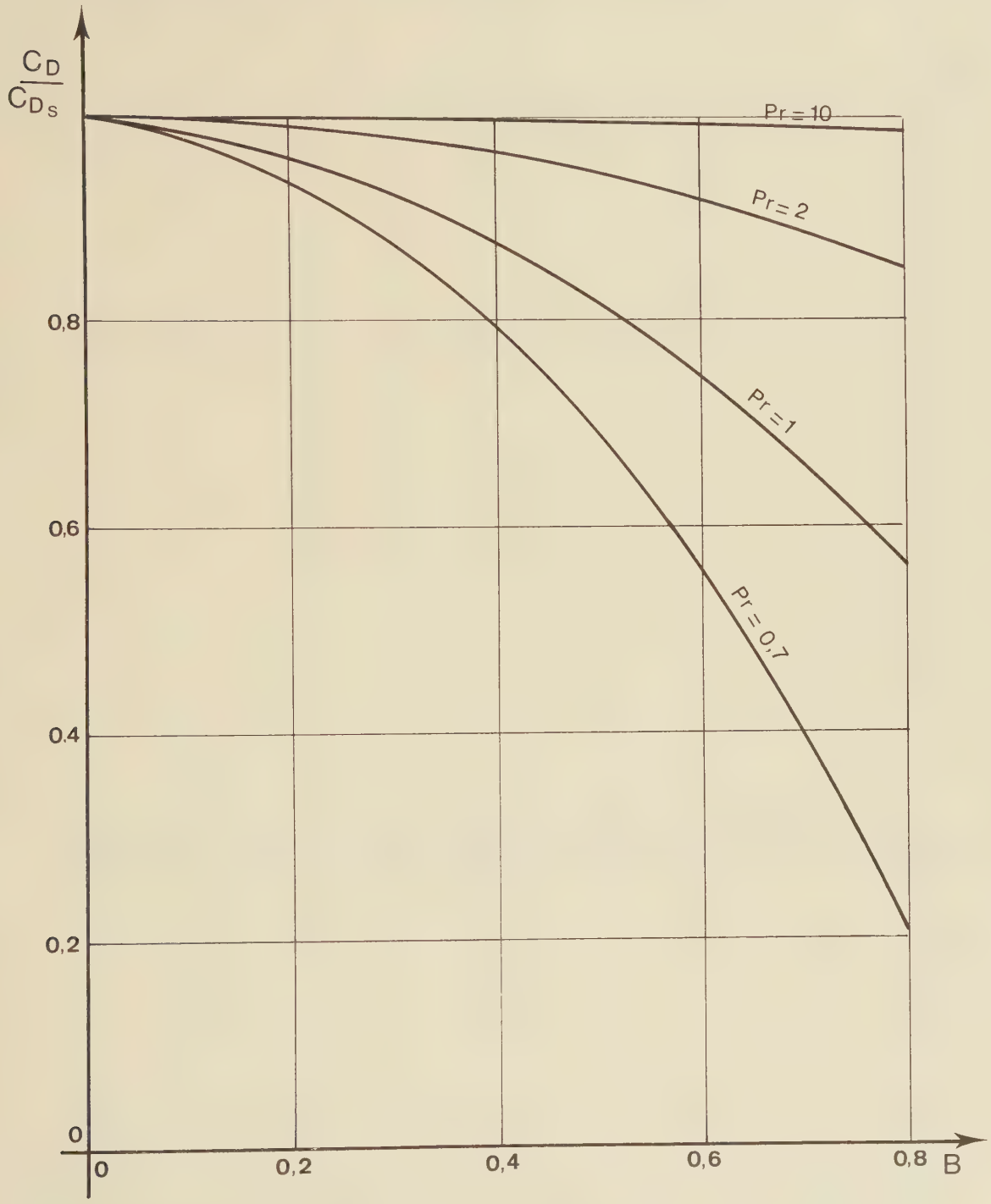


Fig 5 : VARIATION DU COEFFICIENT DE TRAINEE TOTAL

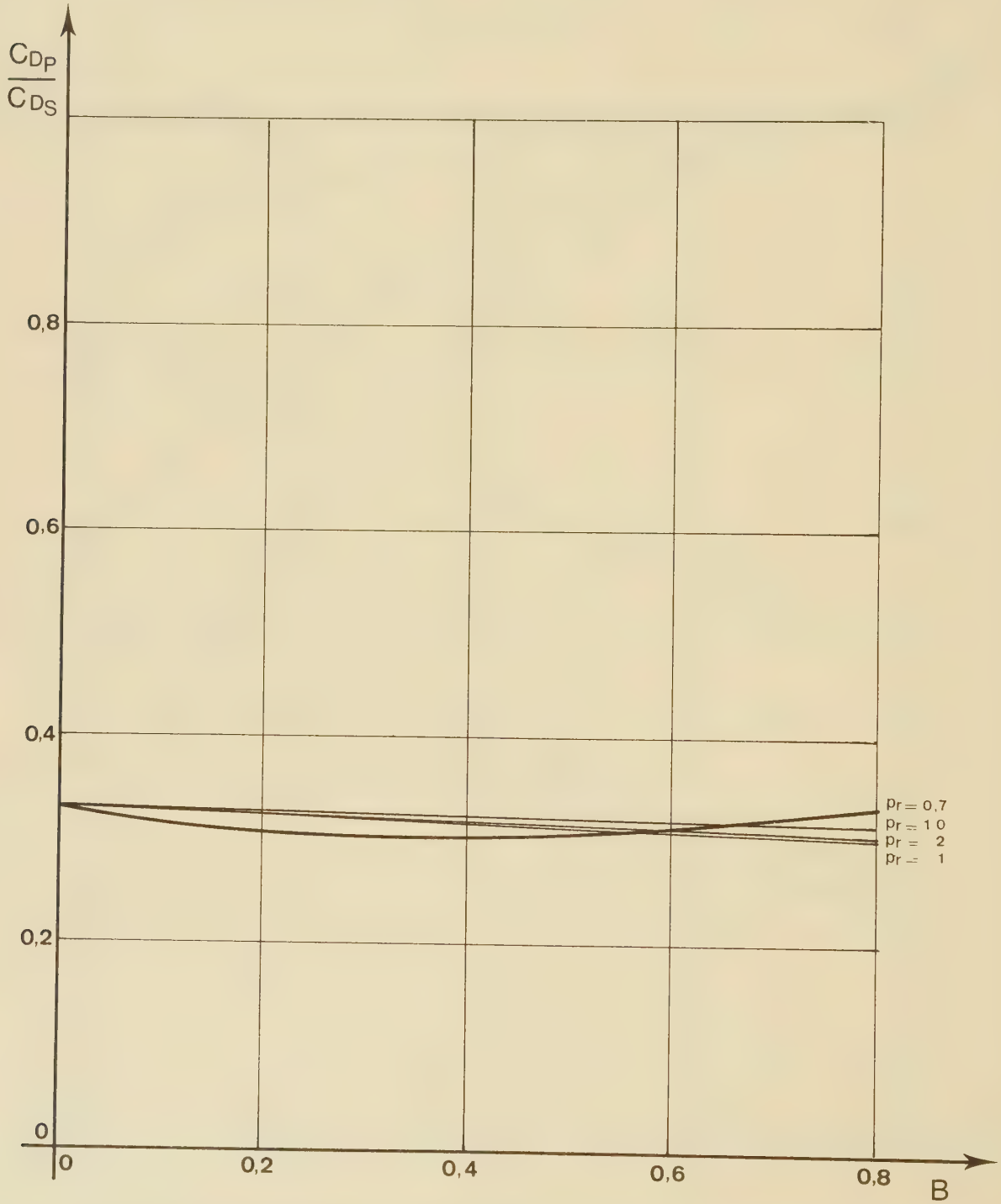


Fig 6 : VARIATION DU COEFFICIENT DE TRAINEE
(terme de pression)

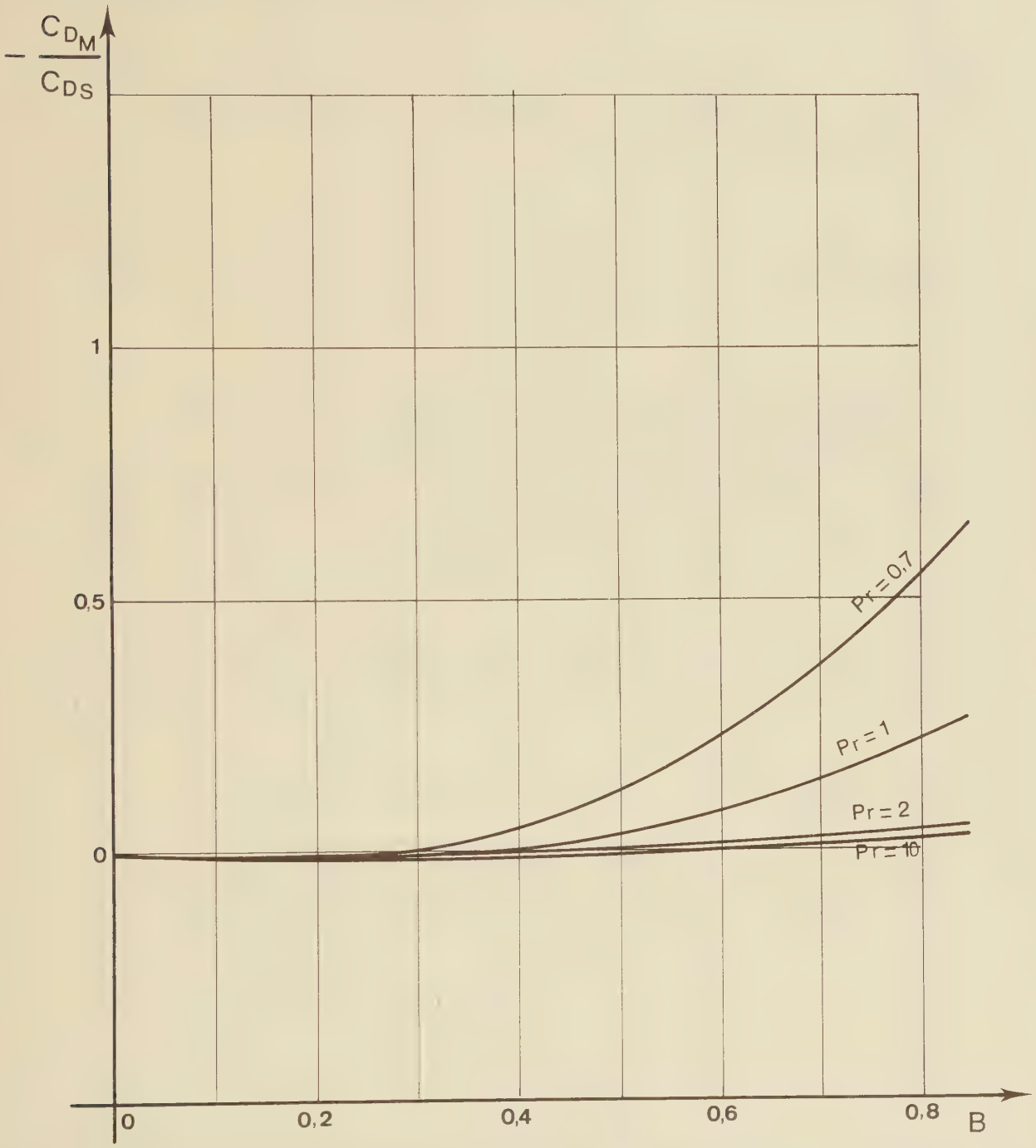


Fig 7 : VARIATION DU COEFFICIENT DE TRAINEE
terme de transfert de masse

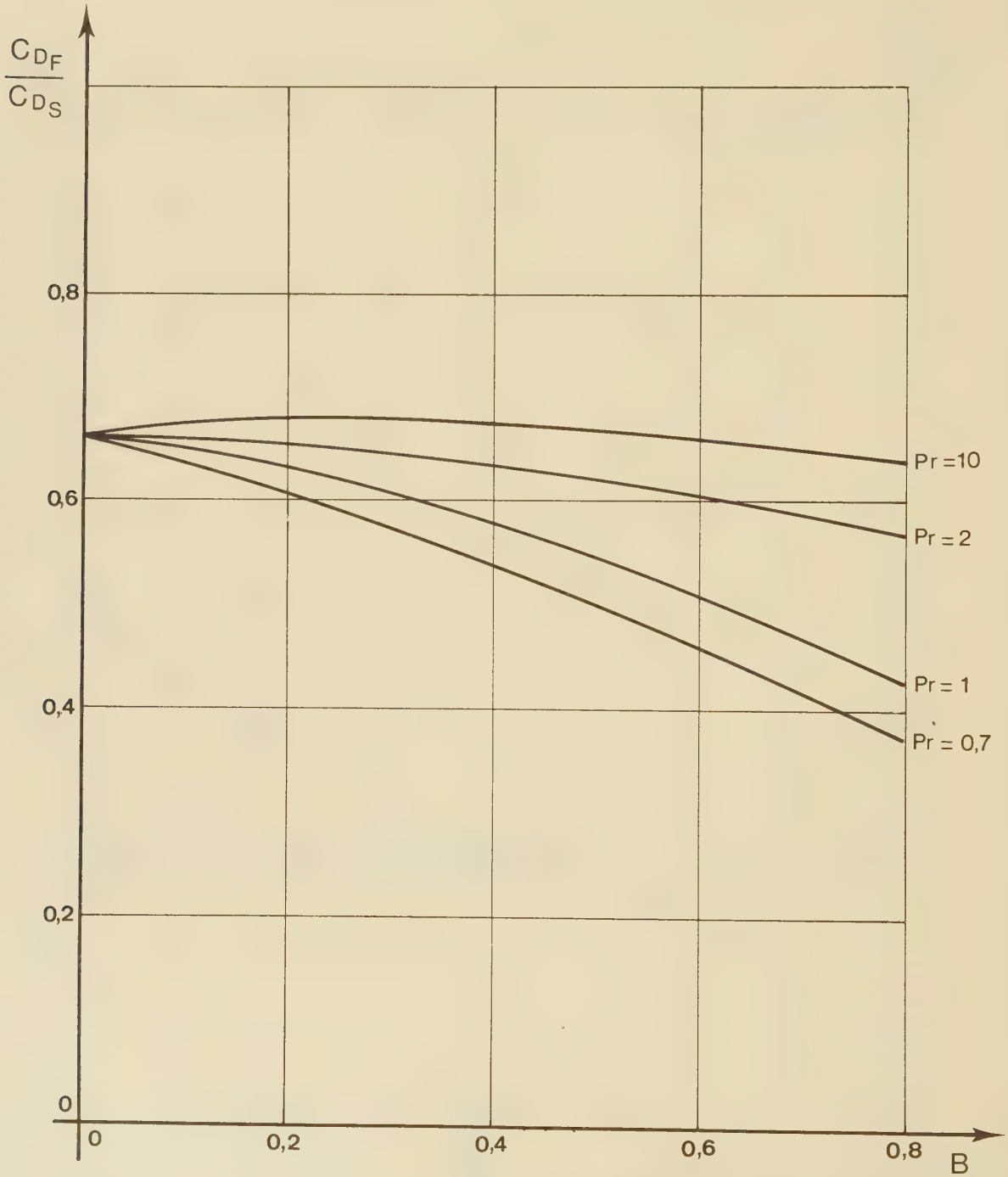


Fig 8 : VARIATION DU COEFFICIENT DE TRAINEE
(terme de frottement)

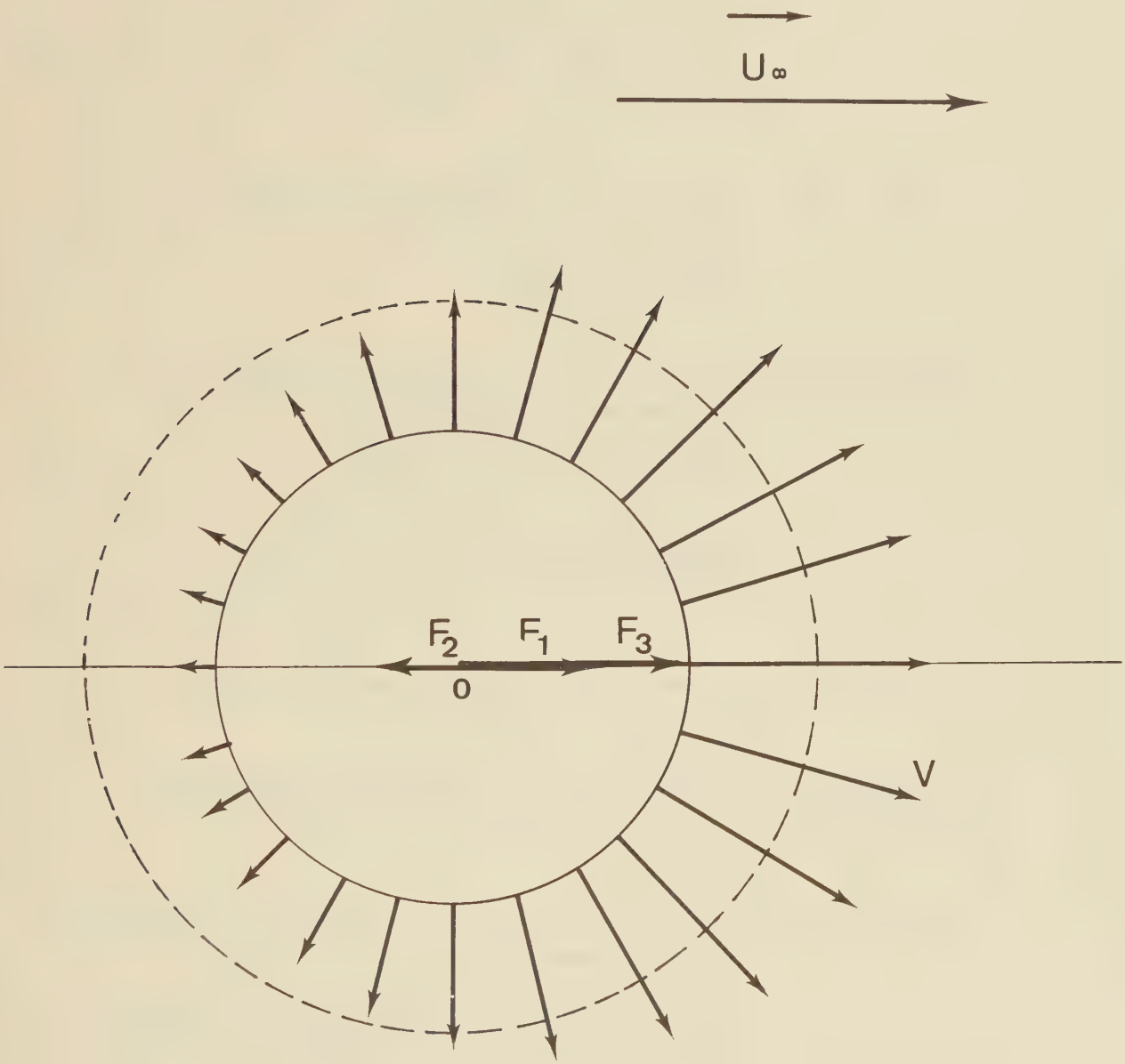


Fig 9 : INTERACTIONS DYNAMIQUES (fortes surchauffes)

REFERENCES

1 DELHAYE J.M. : Contribution à l'étude des écoulements diphasiques eau-air et eau-vapeur.
Thèse de Doctorat. Faculté des Sciences, Université de GRENOBLE (1970).

2 KALININ A.V. : Dérivation of fluid mechanics equations for a two phase medium with phase change.
Heat transfer - Soviet Research 2-3 (1970).

3 BERKER R. : Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible.
Handbuch der physik. VIII/2 . Springer Verlag (1963).

4 KAPLUN S. : Fluid mechanics and singular perturbations.
Academic Press. NEW YORK (1967).

5 VAN DYKE M. : Perturbation methods in fluid mechanics.
Academic Press (1964).

6 FRANCOIS C. : Emploi des méthodes de perturbation pour l'étude des écoulements laminaires.
Communication présentée au IXème Symposium biennal sur les problèmes et méthodes avancés de mécanique des fluides à KAZIMIERZ (POLOGNE). (1-7 Sept. 1969).

7 PROUDMAN I. et PEARSON J.R.A. : Expansions at small REYNOLDS numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder.
J. of Fluid Mech. 2. 1957.

8 RONAT J. : Contribution à l'étude du transfert thermique en écoulement turbulent d'un gaz à propriétés physiques variables.
Thèse de Doctorat. PARIS - Faculté des Sciences (Juin 1971).

9 ACRIVOS A. et TAYLOR Th. D. : Heat and Mass transfer from single spheres in STOKES flow.
The Physics of Fluids. Vol. 5.4 1962.

10 RIMMER P.L. : Heat transfer from a sphere in a stream of small REYNOLDS numbers.
J. of Fluid Mech. 32.1 (1968).

11 FENDELL F.E. , SPRANKLE M.L. et DODSON D.S. : Thin flame theory for a fuel droplet in small viscous flow. J. of Fluid Mech. 26-2 (1966).

12 GUPALO Yu. P. et RYAZANTSEV Yu. S. : Mass and heat transfer from a sphere in a laminar flow.
Chemical Engineering Science. 27. 1972.

ANNEXE II.1

On cherche à résoudre le système :

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} y^{IV} - A \left(\dfrac{y''}{r_1^2}\right)' = f(r_1) \\ \\ (r_1^2 z')' - B z' = C \dfrac{y\, e^{-\frac{B}{r_1}}}{r_1^2} + g(r_1) \end{cases}$$

avec les conditions :

$$y'(1) = 0 \qquad y(1) = \beta z'(1) \qquad z(1) = 0$$

$$y'(\infty) = 0 \qquad y''(\infty) = 0 \qquad z(\infty) = C'$$

A , B , C , C' et β sont des constantes.

La première équation du système (1) complétée par les conditions aux limites suivantes :

$$y'(1) = 0 \qquad y(1) = \alpha \qquad (\alpha = \text{constante})$$

$$y'(\infty) = 0 \qquad y''(\infty) = 0$$

a pour solution la somme des solutions des équations suivantes :

$$\textcircled{2} \quad y^{IV} - A\left(\frac{y''}{r^2}\right)' = 0 \qquad \text{avec} \quad y'(1) = 0 \quad y'(\infty) = 0$$
$$y(1) = \alpha \quad y''(\infty) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad y^{IV} - A\left(\frac{y''}{r^2}\right)' = f(r) \qquad \text{avec} \quad y'(1) = y(1) = y'(\infty) = 0$$
$$y''(\infty) = 0$$

L'équation ② a pour solution $y_1 = \alpha$

L'équation ③ a pour solution $y_2(r)$ qui peut être aisément déterminée quelle que soit la forme de la fonction $f(r)$ au moyen d'un programme de résolution numérique d'un système d'équations différentielles à conditions aux limites.

$$y = \alpha + y_2(r)$$

L'équation différentielle :

$$\begin{cases} (r^2 z')' - B z' = C\left[y_2(r) + \alpha\right]\dfrac{e^{-\frac{B}{r}}}{r^2} + g(r) \\ \text{avec} \quad z(1) = 0 \qquad z(\infty) = C' \end{cases}$$

a pour solution $z = z_1 + \alpha z_2$

où z_1 est solution de :

$$④ \quad \begin{cases} (r^2 z_1')' - B z_1' = C y_2 \dfrac{e^{\frac{B}{r}}}{r^2} + g(r) \\ \text{avec } z_1(1) = 0 \qquad z_1(\infty) = \dfrac{C'}{2} \end{cases}$$

et z_2 est solution de :

$$⑤ \quad \begin{cases} (r^2 z_2')' - B z_2 = C \dfrac{e^{\frac{B}{r}}}{r^2} \\ \text{avec } z_2(1) = z_2(\infty) = 0 \end{cases}$$

On trouve que $z_2 = \dfrac{C}{B}\left[\dfrac{e^{-\frac{B}{r}}}{r} + \dfrac{e^{-B}}{1-e^{-B}}\left(e^{-\frac{B}{r}} - 1\right)\right]$

et z_1 est obtenue par résolution numérique d'un problème à conditions aux limites : ④ .

On détermine alors :

$$\alpha = z'(1) \cdot \beta = \frac{z_1'(1)}{\frac{1}{\beta} - z_2'(1)}$$

et le couple de fonctions :

$$\begin{cases} y = y_2 + \alpha \\ z = z_1 + \alpha z_2 \end{cases}$$

constitue la solution cherchée du système ① .

Cas particulier : $f(r) = g(r) = 0 \qquad C = B\dfrac{1+\beta}{\beta}, \; 1+\beta = e^{B}$.

On trouve aisément $\qquad z_1(r) = \dfrac{C'}{1 - e^{-B}} \left(e^{-\frac{B}{r}} - e^{-B}\right)$

$$z_1(r) = \frac{C'}{1 - e^{-B}} \left(e^{-\frac{B}{r}} - e^{-B}\right), \; \alpha = B\frac{C'}{C}$$

et :

$$y = B\frac{C'}{C} \qquad z = C' e^{-\frac{B}{r}} \left[1 - \frac{1}{r}\right]$$

ANNEXE II.2

On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} \bar{f}''_{1,3,1} - \mu\, Pr^{-1}\left[\dfrac{\bar{f}_{1,3,1}}{\bar{r}_1^{\,2}}\right]' - 2\,\dfrac{\bar{f}_{1,3,1}}{\bar{r}_1^{\,2}} = 0 & (1) \\ \bar{f}_{1,3,1} = \bar{\psi}''_{1,3,1} - 2\,\dfrac{\bar{\psi}_{1,3,1}}{\bar{r}_1^{\,2}} & (2) \\ \left[\bar{r}_1^{\,2}\,\bar{T}_{1,3,1}\right]' - \mu\,\bar{T}'_{1,3,1} - 2\,\bar{T}_{1,3,1} = \lambda\,\dfrac{\bar{\psi}_{1,3,1}}{\bar{r}_1^{\,2}}\, e^{-\frac{\mu}{\bar{r}_1}} & (3) \end{cases}$$

avec :

$$\bar{\psi}'_{1,3,1}(1) = 0 \qquad \bar{\psi}_{1,3,1}(1) = B\,\bar{T}'_{1,3,1}(1)$$

$$\bar{T}_{1,3,1}(1) = 0 \qquad \text{Lim.}_{\bar{r}_1 \to \infty} \bar{T}_{1,3,1} = -\frac{\lambda}{2}$$

1. RECHERCHE DE LA FONCTION DE COURANT

La solution générale $\bar{\psi}_{1,3,1}$ susceptible d'être raccordée s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène associée à (2) une solution particulière de (1), (2) susceptible d'être raccordée.

On vérifie que $Z(\bar{r}_1) = \bar{r}_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \dfrac{\text{Log } \bar{r}_1}{\bar{r}_1} + \sum_{p=3}^{\infty} \alpha_p \bar{r}_1^{1-p}$

où les coefficients α vérifient les relations de récurrence (4) constitue une telle solution particulière.

$$\alpha_1 = -\frac{3}{4}\mu Pr^{-1} \qquad \alpha_2 = -\frac{4}{15}\alpha_1 \mu Pr^{-1} \qquad \alpha_3 = \frac{5}{24}\alpha_2 \mu Pr^{-1}$$

$$\alpha_p = -\frac{(p-3)(p+2)}{(p-2)(p+3)(p+1)}\alpha_{p-1}\mu Pr^{-1} \qquad (4)$$

d'où : $\bar{\psi}_{1,3,1} = C_{1,3}^{1}\ \bar{r}_1^{-1} + C_{1,3}^{2}\ Z(\bar{r}_1) + C_{1,3}^{3}\ \bar{r}_1^{2}$

Le raccord avec $\bar{\psi}_{2,2}$ impose $C_{1,3}^{3} = 1$ et

$$\bar{\psi}_{1,3,1} = C_{1,3}^{1}\ \bar{r}_1^{-1} + \bar{r}_1^{2} + C_{1,3}^{2}\ Z(\bar{r}_1)$$

2. RECHERCHE DE LA TEMPERATURE

La solution générale susceptible d'être raccordée est obtenue en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène associée à (3) une solution particulière de (3) susceptible d'être raccordée. On vérifie que :

$$Y(\bar{r}_1) = \sum_{p=o}^{\infty} \beta_p \bar{r}_1^{-p} + \text{Log } \bar{r}_1 \sum_{p=o}^{\infty} \gamma_p \bar{r}_1^{-p}$$

où les coefficients β_p et γ_p vérifient les relations de récurrence (5) constituent une solution particulière de (3).

Remarquons que $Y(\bar{r}_1)$ est une fonction linéaire de $C^1_{1,3,1}$ et $C^2_{1,3,1}$

$$Y(\bar{r}_1) = Y_1(\bar{r}_1)\, C^1_{1,3} + Y_2(\bar{r}_1)\, C^2_{1,3} + Y_3(\bar{r}_1)$$

D'où la solution générale de (2)

$$\bar{T}_{1,3,1} = K^1_{1,3}\left(\bar{r}_1 - \frac{\mu}{2}\right) + K^2_{1,3}\left(\bar{r}_1 + \frac{\mu}{2}\right) e^{-\frac{\mu}{\bar{r}_1}} + Y(\bar{r}_1)$$

Remarque : Cette solution vérifie la condition à l'infini car :

$$\lim_{\bar{r}_1 \to \infty} \bar{T}_{1,3,1} = \beta_o = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\beta_1 = -\frac{\lambda}{2} \qquad \gamma_1 = 0$$

$$\beta_1 = -\frac{\lambda}{2}(c_{1,3}^2 - \mu) \qquad \gamma_1 = 0$$

$$\beta_2 = 0 \qquad \gamma_2 = \frac{1}{3}\left[\mu\,\beta_1 + \frac{\mu^2}{2} - \lambda(c_{1,3}^2(\alpha_1 - \mu))\right]$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{4}\left[c_{1,3}^2\,\alpha_2 - 2\mu\,\gamma_2\right]$$

$$\beta_3 = \frac{1}{4}\left[5\gamma_3 + \mu\,\gamma_2 + \lambda\left[c_{1,3}^1 - \frac{\mu^3}{6} + c_{1,3,1}^2\left(\frac{\mu^2}{2} - \mu\,\alpha_1\right)\right]\right]$$

et pour tout $p > 3$:

$$\gamma_p = \frac{1}{p\,(p-1)-2}\left[\frac{(-1)^{p-3}\,\mu^{p-3}}{(p-3)!}\,c_{1,3}^2\,\alpha_2 - (p-1)\,\mu\,\gamma_{p-1}\right]$$

$$\beta_p = \frac{1}{p\,(p-1)-2}\left[(2p-1)\,\gamma_p + \mu\,\gamma_{p-1} - \mu(p-1)\,\beta_{p-1}\right.$$

$$+\lambda\left[c_{1,3}^1\frac{(-1)^{p-3}\,\mu^{p-3}}{(p-3)!} + \frac{(-1)^p\,\mu^p}{p!} + c_{1,3}^2\left[\frac{(-1)^{p-1}\,\mu^{p-1}}{(p-1)!}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\alpha_1\,\frac{(-1)^{p-2}\,\mu^{p-2}}{(p-2)!} + \sum_{i=3}^{p-1}\frac{(-1)^{p-i}\,\mu^{p-i}}{(p-i)!}\alpha_i\right]\right]\right]$$

Relations de Récurrence (5)

ANNEXE II.3

La fonction $\bar{T}_{3,5}(\bar{r}_3)$ est solution de l'équation :

$$\bar{\nabla}_3^2 \bar{T}_{3,5} + \frac{1}{r_3^2} \overline{\mathcal{H}}_3 (\bar{\psi}_{3,1}, \bar{T}_{3,5}) = -\frac{1}{r_3^2} \overline{\mathcal{H}}_3 (\bar{\psi}_{3,3}, \bar{T}_{3,3})$$

$$\text{Lim.}_{r_3 \longrightarrow \infty} \bar{T}_{3,5} = 0$$

avec :

$$\overline{\mathcal{H}}_3 (\bar{\psi}_{3,3}, \bar{T}_{3,3}) = \frac{\lambda\, e^{\bar{r}_3 \frac{\sigma-1}{2}}}{2.\bar{r}_3^2} \left[(\mu - \delta \mathrm{Pr})(2 - \bar{r}_3\sigma + \bar{r}_3) + \delta\, e^{\bar{r}_3 \mathrm{Pr}^{-1} \frac{(\sigma-1)}{2}} \times \left[\mathrm{Pr}(2 + \bar{r}_3 - \bar{r}_3\sigma) + (1+\sigma)\,\bar{r}_3 \right] \right]$$

Si l'on pose : $\bar{T}_{3,5} = e^{\frac{\bar{r}_3 \sigma}{2}} \sum_{j=o}^{\infty} S_j(\bar{r}_3) P_j(\sigma)$

et :

$$\overline{\mathcal{H}}_3 (\bar{\psi}_{3,3}, \bar{T}_{3,3}) = \sum_{j=o}^{\infty} R_j (\bar{r}_3)\, P_j (\sigma)$$

on est conduit à la suite d'équations différentielles :

$$(\bar{r}_3^2\, S_j')' - j\,(j+1)\, S_j - \frac{\bar{r}_3^2\, S_j}{4} = R_j \qquad \text{Lim.}_{\bar{r}_3 \longrightarrow \infty} S_j = 0 .$$

Les conditions de raccord avec les approximations antérieures imposent :

$$S_o(\bar{r}_3) = \frac{\lambda\mu}{2\bar{r}_3^2} - \frac{\lambda}{2\bar{r}_3}(1+\mu) + \Delta'^1_o + \Delta^2_o \ \mathrm{Log}\ \bar{r}_3 + 0(\bar{r}_3)$$

$$S_1(\bar{r}_3) = -\frac{\lambda}{2\bar{r}_3}\left[\delta - \mu\right] + 0(1)$$

$$S_j(\bar{r}_3) = 0(1) \qquad \forall j > 1$$

Il est aisé de voir que la constante Δ^1_o intervenant dans la composante de rang zéro de $\bar{T}_{3,5}$ est égale à :

$$\Delta^1_o = \Delta'^1_o + \frac{\lambda}{12}(\mu - \delta) + \frac{\lambda\mu}{48}$$

La détermination de Δ'^1_o et Δ^2_o nous oblige à chercher une solution s'annulant à l'infini de l'équation différentielle.

$$(\bar{r}_3^2 S'_o)' - \bar{r}_3^2 \frac{S_o}{4} = R_o = -\frac{1}{2\bar{r}_3^2}\int_{-1}^{+1} \mathcal{H}_3(\bar{\psi}_{3,3}, \bar{T}_{3,3})\, d\sigma$$

On trouve :

$$S_o = K^1_{3,5}\frac{e^{-\frac{\bar{r}_3}{2}}}{\bar{r}_3} + \frac{\lambda\delta}{6\bar{r}_3}\left[\left(\frac{3\mu}{\delta\bar{r}_3} + \mathrm{Pr}^3\frac{1-\bar{r}_3}{\bar{r}_3^2}\right)e^{-\frac{\bar{r}_3}{2}} + \frac{\mathrm{Pr}^2}{\bar{r}_3^2}\left[(\mathrm{Pr}-1)\bar{r}_3 - \mathrm{Pr}\right]e^{-\frac{\bar{r}_3}{2}(1+\frac{2}{\mathrm{Pr}})}\right.$$

$$\left. - 2E(\bar{r}_3\mathrm{Pr}^{-1})e^{-\frac{\bar{r}_3}{2}} + \mathrm{Pr}(\mathrm{Pr}^2-3)E(\bar{r}_3)e^{-\frac{\bar{r}_3}{2}} + (\mathrm{Pr}+1)^2(2-\mathrm{Pr}) \times E(1+\mathrm{Pr}^{-1})e^{\frac{\bar{r}_3}{2}}\right]$$

avec :

$$E(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

Les conditions de raccord déterminent $K_{3,5}^{1}$, constante d'intégration.

$$K_{3,5}^{1} = -\frac{\lambda}{2}(1+\mu)+\frac{\lambda\mu}{4}-\frac{\lambda\delta}{12}\Big[Pr\,(1-2\,Pr)-2(1+Pr)^2(2-Pr)\,Log(1+Pr) + 2\,Pr\,(3-Pr^2)\,Log\,Pr\Big]$$

On trouve finalement :

$$\Delta_o^1 = \frac{\lambda}{24}\Big[6 + 7\,\mu + \delta\, F\,(Pr)\Big]$$

$$\Delta_o^2 = -\frac{\lambda\mu}{3}$$

avec :

$$F(Pr) = 2\,Pr\,(1-2Pr) - 4(1+Pr)^2(2-Pr)\,Log\frac{1+Pr}{Pr} + \frac{50}{3} - 8\gamma$$

où :

γ = 0.577 215 (Constante d'EULER).

Chapitre III

Installation expérimentale

S O M M A I R E

Pages

I - BUT DE L'EXPERIENCE : CHOIX DES CARACTERISTIQUES 151

II - DESCRIPTION DE L'INSTALLATION 153

A - GENERATEUR DE GOUTTES 153

1) Principe - Théorie simplifiée de Lord RAYLEIGH 153
2) Avantages et inconvénients du procédé 158
3) Description de l'appareillage 161

a) Alimentation en eau 161
b) Tube capillaire 161
c) Dispositif de production et de sélection 164

α) Constituants externes 164
β) Constituants internes : dispositif électronique 169

B - ATMOSPHERE DE VAPEUR 171

1) Description 171
2) Contrôle de la température 171
3) Production de la vapeur 172

C - MOYENS D'OBSERVATION - MOYENS DE MESURE 172

1) Observation de la formation des gouttes 172
2) Observation de l'évolution des gouttes 176

a) Dispositif d'éclairement 176
b) Dispositif optique 176
c) Réglage de la distance frontale 178
d) Analyse des photographies 179

III - DEROULEMENT D'UNE EXPERIENCE 181

IV - PRECISION DES MESURES 181

N O T A T I O N S

Dimensions

a	: Rayon du jet	L
r	: Rayon de la goutte	L
t	: Temps	T
V	: Vitesse du jet	$L\,T^{-1}$
ρ_L	: Masse volumique du liquide	$M\,L^{-3}$
A	: Constante de tension superficielle	$M\,T^{-2}$
N	: Fréquence de la perturbation	T^{-1}
λ	: Longueur d'onde	L
k	: Nombre d'onde	L^{-1}
α	: Amplitude de la déformation du jet	L
Re	: Nombre de REYNOLDS	0
Str	: Nombre de STROUHAL	0
Web	: Nombre de WEBER	0
J_o	: Fonction de BESSEL d'ordre zéro.	

I - BUT DE L'EXPERIENCE - CHOIX DES CARACTERISTIQUES

Nous allons maintenant aborder une étude expérimentale des phénomènes que nous avons tenté d'analyser théoriquement durant les précédents chapitres. Nous allons essayer d'observer et de mesurer les caractéristiques dynamiques et thermiques d'une goutte d'eau en mouvement relatif par rapport à une atmosphère calme de vapeur surchauffée. Nous nous limiterons volontairement à des conditions expérimentales simples pour deux raisons essentielles :

- d'une part, la production contrôlée de gouttes et les mesures directes de leurs caractéristiques sont très délicates à réaliser;
- d'autre part, nous espérons pouvoir juger de la légitimité de l'utilisation des formules établies au précédent chapitre. Nous chercherons donc à obtenir des conditions expérimentales correspondant à de faibles valeurs du nombre de REYNOLDS construit à partir du rayon de la goutte et de la vitesse relative de la vapeur.

Nous serons conduits à développer une méthode originale de production et d'observation de gouttes. Outre certaines précisions concernant le comportement dynamique des gouttes en l'absence d'évaporation, cette méthode nous permettra, pour différentes valeurs de la surchauffe de la vapeur, de mesurer la vitesse de la goutte et son diamètre tout au long de sa trajectoire.

Nous avons adopté les conditions expérimentales suivantes :

Nous étudions une goutte en chute libre dans une atmosphère calme et des raisons de simplicité expérimentale nous font adopter une pression voisine de la pression atmosphérique et des températures de vapeur inférieures à 200°C.

Nous voulons observer la majeure partie de l'évaporation d'une goutte pour des surchauffes modérées, ceci sur une distance de quelques dizaines de centimètres ; nous désirons également obtenir tout au long de la trajectoire des nombres de REYNOLDS inférieurs à 1. Les gouttes étant introduites dans une atmosphère calme à une vitesse supérieure à leur vitesse limite de chute, leur évaporation durant la période de freinage doit être faible vis-à-vis de l'évaporation totale. Ces diverses considérations nous ont incités à choisir des diamètres initiaux voisins de 100 microns.

Deux catégories de moyens de production de gouttes peuvent être envisagées. Nous pouvons produire des gouttes d'un diamètre voisin du diamètre choisi et observer l'une d'entre elles durant son évolution complète. Nous pouvons aussi produire des gouttes rigoureusement identiques quant à leur vitesse et leur diamètre initiaux. Nous sommes alors en présence d'un phénomène répétitif car l'évolution d'une goutte, dans des conditions fixées d'atmosphère de vapeur, ne dépend que des paramètres initiaux. Les observations successives de gouttes distinctes à différentes distances de l'orifice d'injection nous fourniront des informations sur l'évolution complète d'une goutte tout au long de sa trajectoire.

La première méthode conduit à des difficultés expérimentales importantes pour l'observation du phénomène. Les distances parcourues par les gouttes avant leur évaporation complète sont trop grandes pour permettre l'emploi d'une caméra ultra rapide ou d'un miroir tournant [7]. Dans la deuxième méthode, au contraire, des moyens d'observation classique sont directement utilisables à un niveau fixé. Les difficultés résident alors dans la conception et la réalisation d'un appareil produisant d'une manière périodique des gouttes identiques ayant la même vitesse initiale.

L'adoption de cette deuxième méthode a orienté l'ensemble de notre installation.

II - DESCRIPTION DE L'INSTALLATION

Un schéma général et une vue d'ensemble sont présentés sur les figures 1 et 2.

A - GENERATEUR DE GOUTTES

1) Principe : Théorie simplifiée de Lord RAYLEIGH

Cet appareil utilise la désintégration en gouttes identiques d'un jet capillaire instable sous l'action de la tension superficielle et soumis à une excitation périodique. Ce phénomène a été étudié depuis fort longtemps [1] , mais ce n'est que récemment que plusieurs études théoriques [5] , [6] sont venues préciser les conditions de cette instabilité et que des dispositifs expérimentaux de production de gouttes fondés sur ce principe ont été réalisés [2] , [3] , [4] .

Sans prétendre étudier d'un point de vue théorique ou expérimental ce phénomène, nous rappellerons les résultats de la théorie de RAYLEIGH [1] qui permet de prédire de manière approchée les caractéristiques des gouttes ainsi produites. Si on applique à un jet liquide issu d'un tube capillaire une perturbation axiale périodique, ce jet peut être fractionné en gouttelettes rigoureusement identiques. La perturbation produite dans le jet a une longueur d'onde égale à la vitesse du jet divisée par sa fréquence : $\lambda = \frac{V}{N}$. Lord RAYLEIGH, négligeant les effets de l'atmosphère ambiante et la viscosité du liquide a montré que, pour être amplifiée, cette perturbation devait avoir une longueur d'onde supérieure à la circonférence du jet. Dans ces conditions, l'amplitude α de cette perturbation varie en fonction du temps d'une manière exponentielle $\alpha \sim e^{\omega t}$, avec :

$$\omega^2 = \frac{A}{\rho_L a^3} \frac{(1 - k^2a^2)\, i\, k\, a\, J_o'(i\, k\, a)}{J_o(i\, k\, a)}$$

où : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

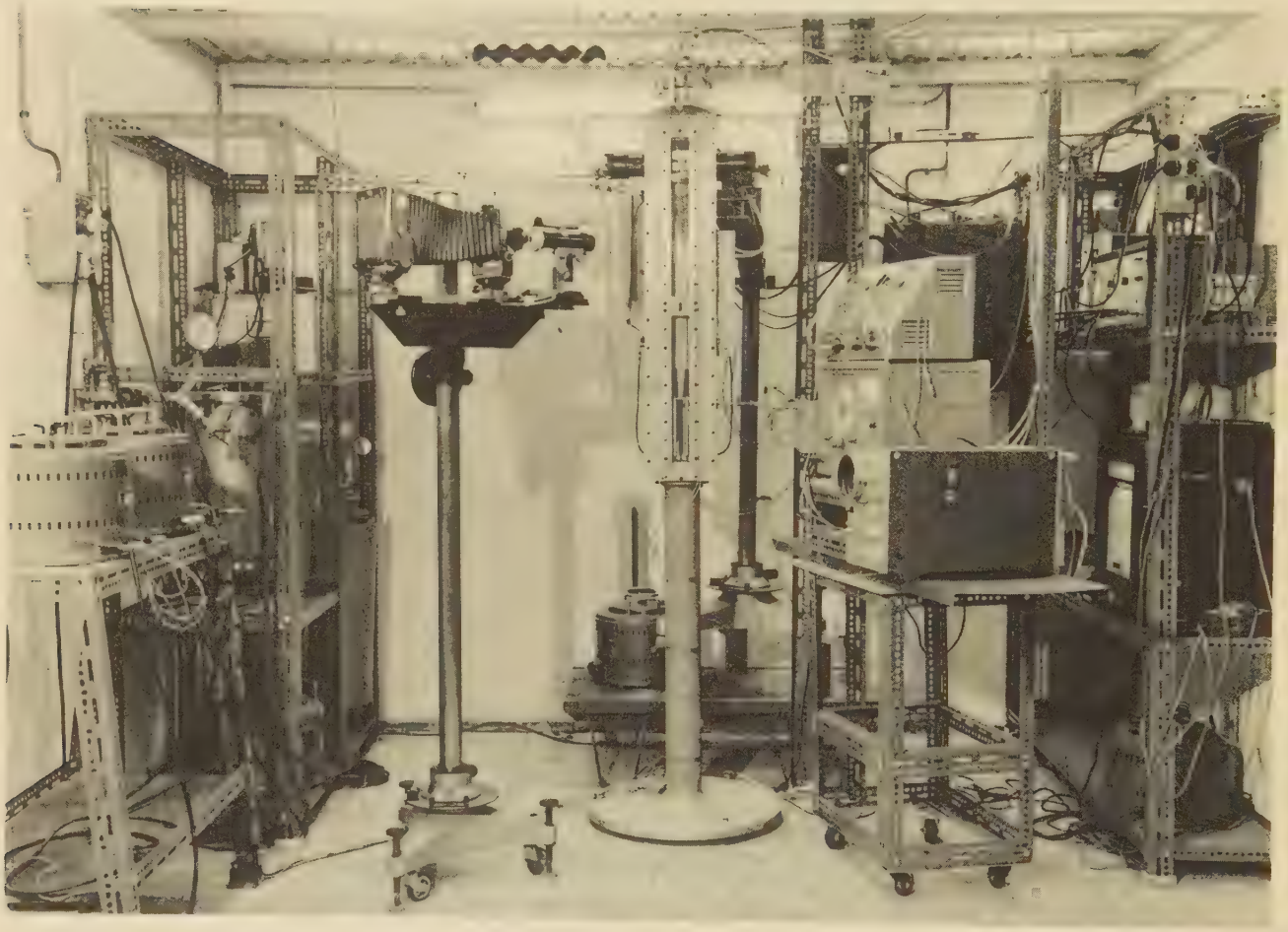


Fig1: VUE GENERALE DE L'INSTALLATION

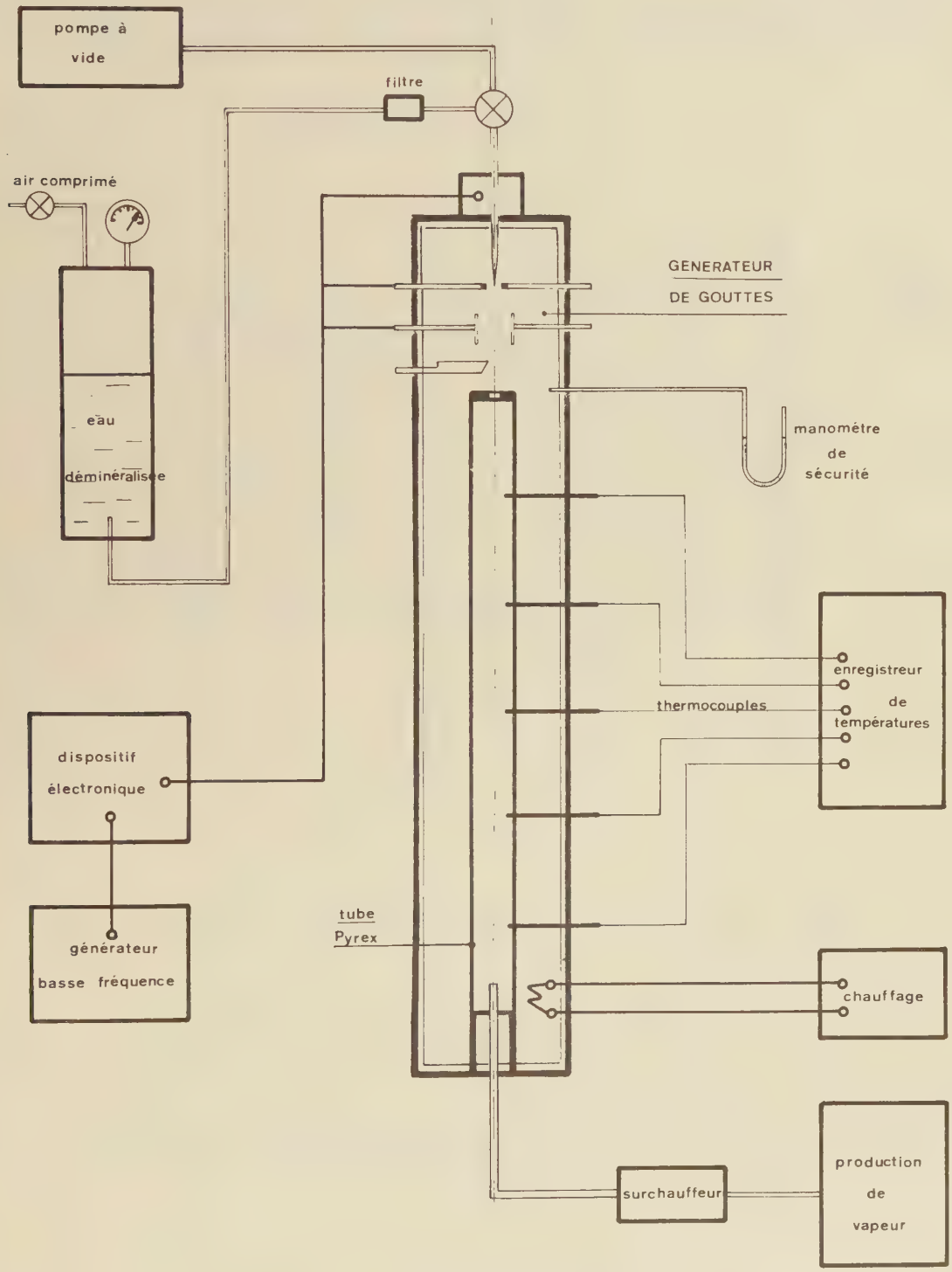
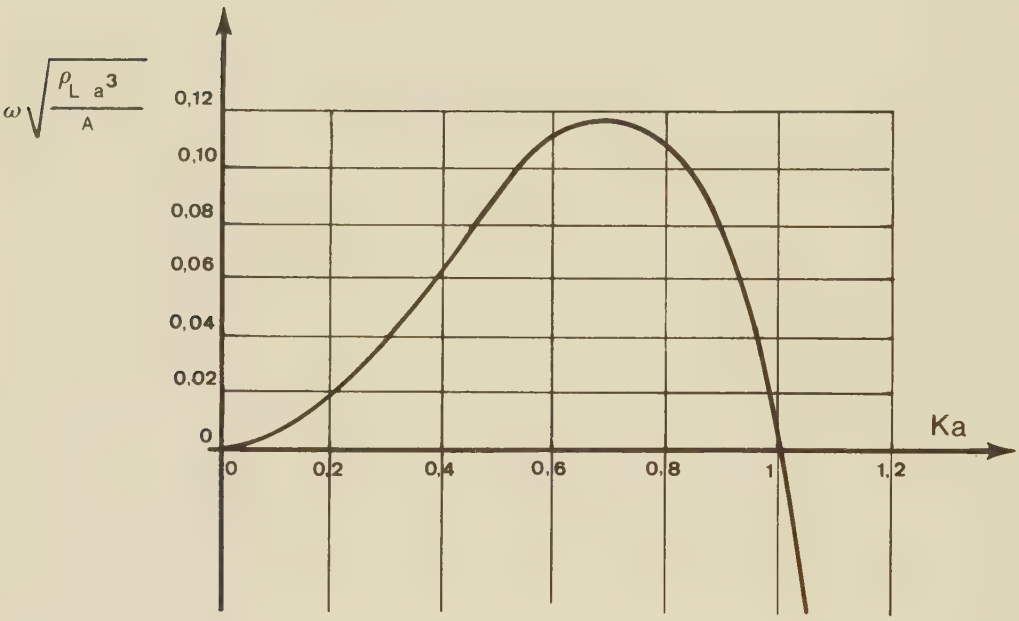


Fig 2 : SCHEMA GENERAL DE L'INSTALLATION

La courbe représentant ω en fonction de $k\,a$ présente un maximum pour $k\,a = 0.697$.



et la longueur d'onde correspondant à la production optimale de gouttelettes est égale à :

$$\lambda_m \simeq 9 \times a$$

ce qui correspond à une valeur particulière d'un nombre de STROUHAL construit à partir des caractéristiques du jet.

$$Str = \frac{V}{N.a} = 9$$

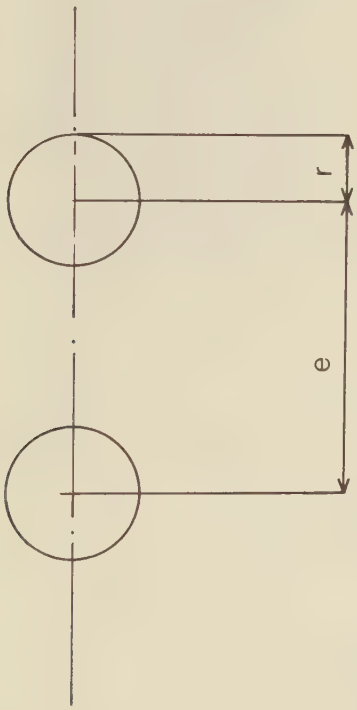
Le rayon des gouttes ainsi formées est relié au rayon du jet par :

$$\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 = 9\ \pi\ a^3$$

soit :

$$r \simeq 1.9 \times a$$

et l'intervalle initial entre gouttes vaut :



$$e \simeq 2,4 \times 2r$$

Ces résultats ont été vérifiés expérimentalement et nous pouvons retenir qu'un jet capillaire de rayon a auquel est appliquée une perturbation de longueur d'onde $\lambda_m = 9 \times a$ est dissocié en gouttelettes identiques de rayon $r = 1.9 \times a$ espacées de $e = 2.4 \times 2r$.

2) Avantages et inconvénients de ce procédé

Par ce procédé, nous obtenons d'une manière stable des gouttes calibrées dont la taille peut être théoriquement fixée à l'avance et ne dépend que du diamètre de l'orifice du tube capillaire. Les caractéristiques des gouttes dépendent cependant des conditions d'émission mais celles-ci étant fixées, la stabilité du phénomène est remarquable. Il importe donc de mesurer la taille et la vitesse initiales des gouttes au début de chaque expérience.

La figure 3 présente la dissociation en gouttes d'un jet issu d'un orifice de 44 microns de diamètre dans une atmosphère d'air à 20°C à la pression atmosphérique. Le jet non perturbé a un diamètre de 48 microns par suite d'un recollement sur la paroi du tube. Après quelques oscillations entre les deux formes extrêmes d'ellipsoïde allongé et d'ellipsoïde aplati, les gouttes sont parfaitement sphériques et ont pour caractéristiques :

	Valeurs mesurées	Valeurs théoriques
Rayon	48 μ	45 μ
Ecartement initial	205 μ	216 μ

Le mouvement de chute libre de la goutte ne modifie pas sensiblement sa forme sphérique. Une différence de pression ΔP entre deux points de la surface de la goutte entraîne une variation relative du rayon de courbure telle que : $\frac{1}{r}\left[\frac{\Delta r}{r}\right] = \frac{\Delta P}{2A}$. Or, la différence de pression évaluée en supposant parfait le fluide extérieur à la goutte est inférieure à $\frac{9}{8}\rho U^2$, donc :

$$\frac{\Delta r}{r} \leqslant \frac{9}{16}\,\frac{\rho U^2 R}{A} = \frac{9 \cdot Web}{32}$$

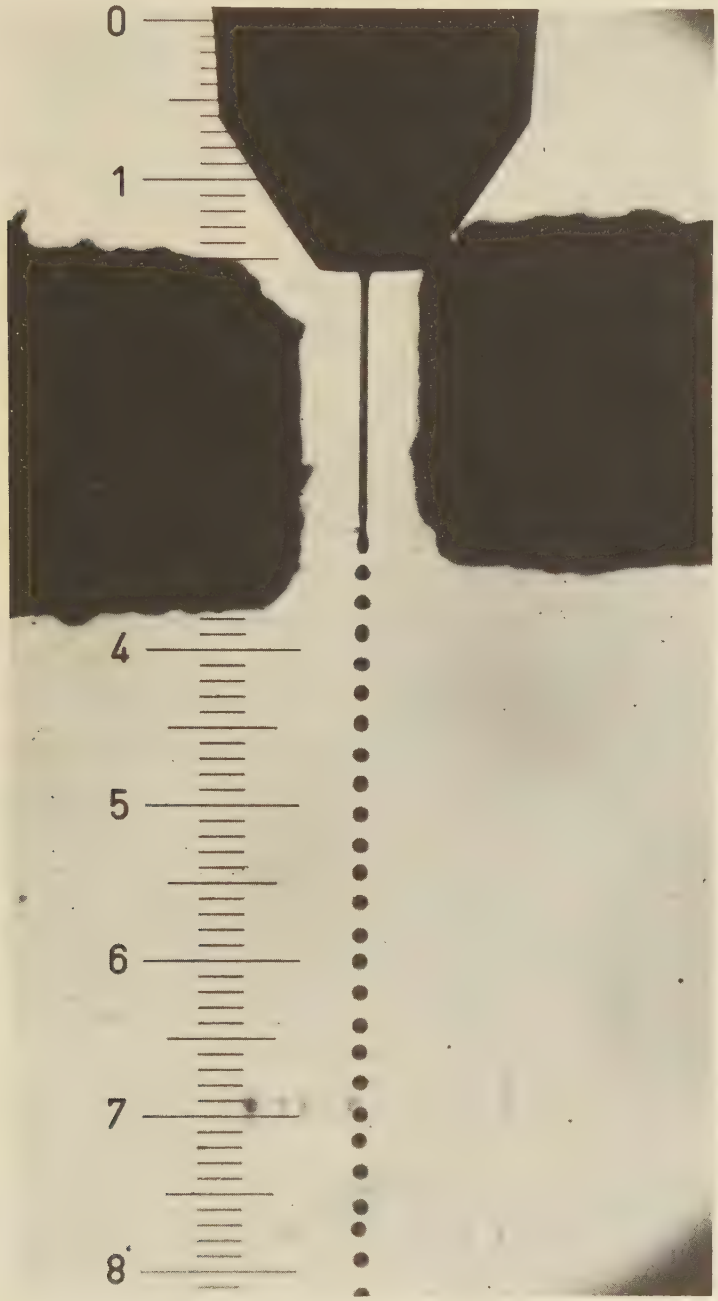


Fig 3 : FORMATION DES GOUTTES

Dans nos conditions expérimentales $\frac{\Delta r}{r} < 10^{-3}$. La déformation de la goutte due à sa vitesse de chute est donc négligeable.

Ces gouttes sont susceptibles de convenir pour nos expériences d'évaporation. Le principal inconvénient réside dans la production d'un trop grand nombre de gouttes. Elles sont trop rapprochées pour que les interactions aérodynamiques soient négligeables ; celles-ci ont pour conséquence des coalescences impossibles à contrôler donnant naissance à des gouttes de tailles aléatoires. Nous avons donc cherché à contrôler l'espacement entre gouttelettes. Pour cela, nous en éliminons rapidement un certain nombre par déviation électrostatique.

A la sortie du tube capillaire, le jet liquide non encore désintégré en gouttes traverse une électrode cylindrique ; entre cette électrode et le jet est appliquée une différence de potentiel u . Le jet constitue l'armature interne d'un condensateur dont l'électrode est l'armature externe. Si ce jet est désintégré durant la traversée de l'électrode, les gouttes ainsi formées conservent leur charge et sont donc susceptibles d'être déviées par un champ électrique créé entre les deux plaques d'un condensateur plan entre lesquelles est appliquée une différence de potentiel élevée U . Il suffit d'interrompre le courant de charge de l'électrode pour obtenir des gouttes non chargées donc non déviées. Si nous modulons la différence de potentiel entre l'électrode et le jet de telle manière qu'elle soit nulle durant le temps de formation d'une seule goutte, on conçoit la possibilité de contrôler l'espacement entre gouttes non déviées. Nous pouvons en effet régler l'intervalle de temps séparant deux impulsions de décharge de l'électrode.

Les figures 4 et 5 présentent le schéma de principe et la réalisation de la sélection de gouttes de 96 μ de diamètre.

La mesure de la déviation des gouttes permet de connaître leur charge.

$$q = m. \frac{V^2}{U} \frac{h}{l} t g \alpha$$

où m est la masse de la goutte, ℓ la longueur des plaques de déviation et h leur écartement, et α l'angle de déviation. Pour nos conditions de production et de sélection de gouttes de 100 μ de diamètre, nous trouvons :

$$q \simeq 2.10^{-13} C.$$

3) Description de l'appareillage

a) Alimentation en eau

Elle est réalisée au moyen d'une capacité en acier inoxydable partiellement remplie d'eau déminéralisée provenant de la chaîne de déminéralisation de l'Installation à Haute Pression de Vapeur du Laboratoire de CHATOU. Au-dessus de la surface libre est maintenue une pression d'air comprimé ajustable permettant d'obtenir dans le circuit un débit d'eau de l'ordre du centimètre cube par minute. Ce débit est suffisamment faible et la section horizontale de la capacité suffisamment grande pour que les variations dues à la baisse de la surface libre soient négligeables durant une expérience. Cette eau traverse un filtre avant d'atteindre le tube capillaire. Un dispositif annexe comportant une pompe à vide permet de faire circuler un liquide en sens inverse à partir de l'extrémité du tube ; ce dispositif est utilisé pour éliminer une particule venue accidentellement obstruer l'orifice.

b) Tube capillaire

Il est réalisé par étirement sur un fil métallique calibré, éliminé par la suite, d'un tube de verre de 3.5 mm de diamètre intérieur. L'étranglement ainsi réalisé est rodé à son extrémité. Nous avons ainsi obtenu des diamètres d'orifices de 50 μ . Le ruissellement dû à la condensation de la vapeur sur les parois du tube vient perturber les conditions de formation du jet. Pour remédier à cet inconvénient, un disque de caoutchouc résistant à la température entoure le tube et protège l'orifice capillaire.

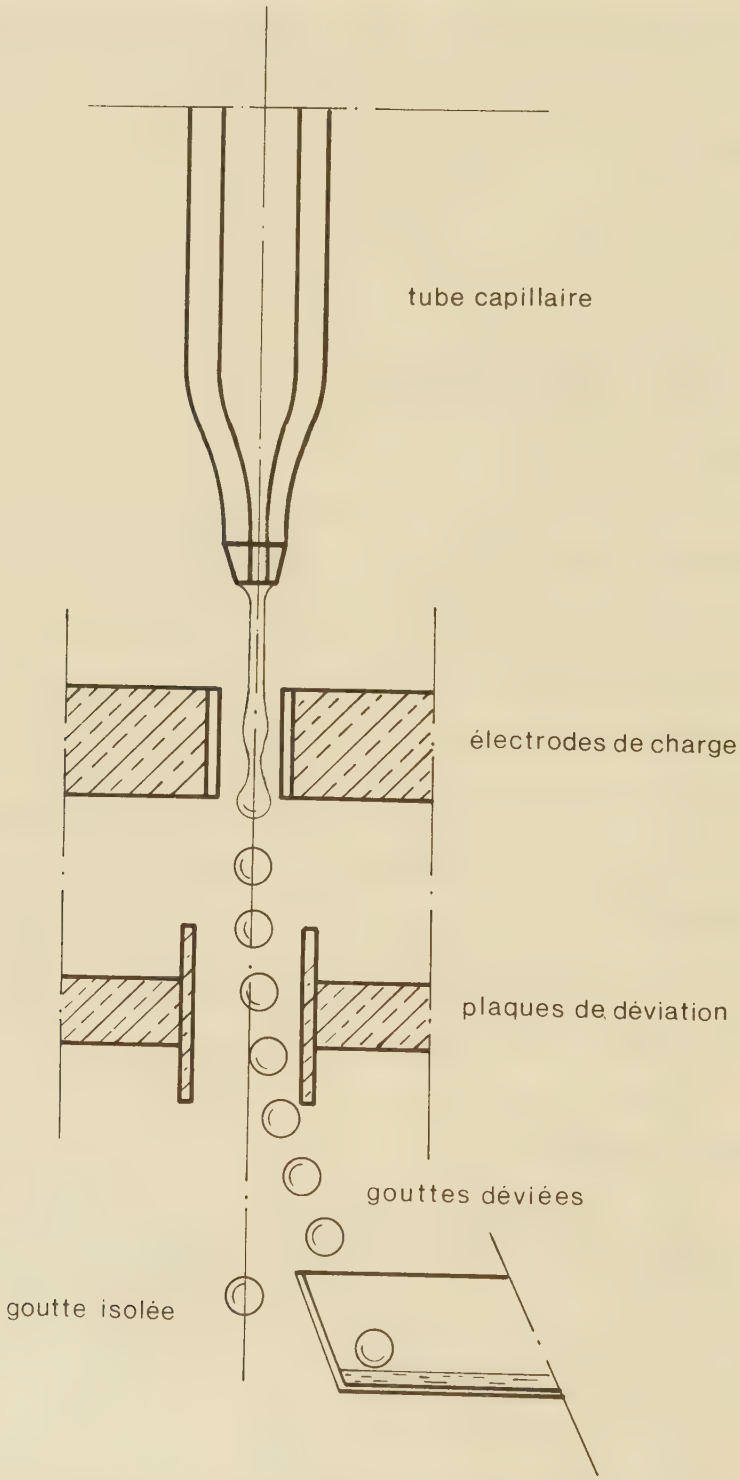


Fig 4 : SELECTION DES GOUTTES (principe)

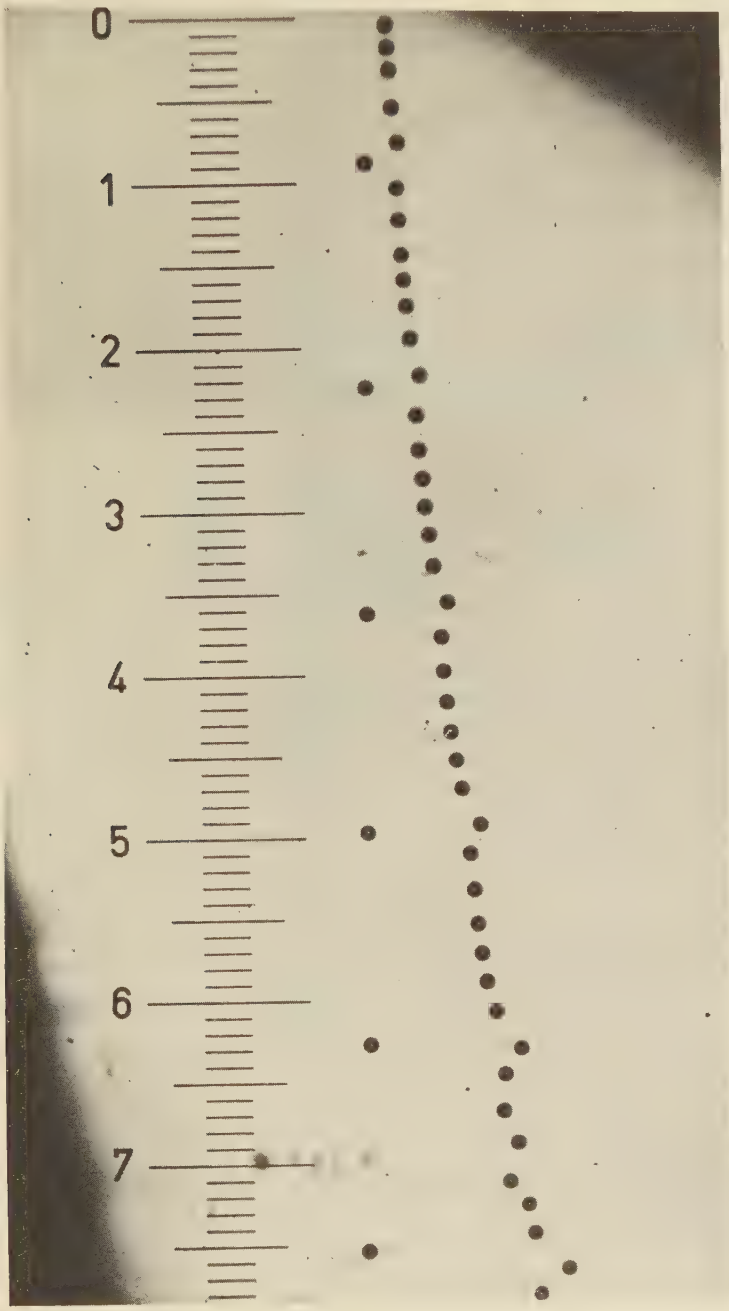


Fig 5 : SELECTION DES GOUTTES

c) Dispositif de formation et de sélection des gouttes

α) Constituants externes

- Système vibrant :

Le tube de verre est rendu solidaire au moyen d'un manchon en aluminium de la bobine d'un électro-aimant qui est percé en son centre (figure 6). Un générateur de fréquence permet de faire vibrer ce système à une fréquence pouvant atteindre 30 kHz. La perturbation appliquée au jet est axiale et l'amplitude de vibration doit être aussi faible que possible afin d'éviter d'importantes oscillations des gouttelettes ainsi formées.

- Système de sélection :

Un schéma de principe est présenté sur la figure 7. L'électrode de charge est formée de deux coquilles hémi-cylindriques de rayon intérieur 1.5 mm réalisées en laiton. Ces deux coquilles, reliées entre elles sont portées à un potentiel maximum de 60 Volts par rapport au jet. Les plaques de déviation sont constituées de deux plaques de laiton de 2 cm de diamètre entre lesquelles est appliquée une différence de potentiel : U = 2000 Volts. Les écartements des électrodes et des plaques sont ajustables. La cote des électrodes est fixe ; celles du tube capillaire et des plaques de déviation sont réglables. Une petite coupelle dont la position est ajustable permet de récupérer les gouttes déviées et d'empêcher qu'elles ne viennent perturber les gouttes non déviées.

Ces divers constituants sont présentés sur les figures 8 et 9.

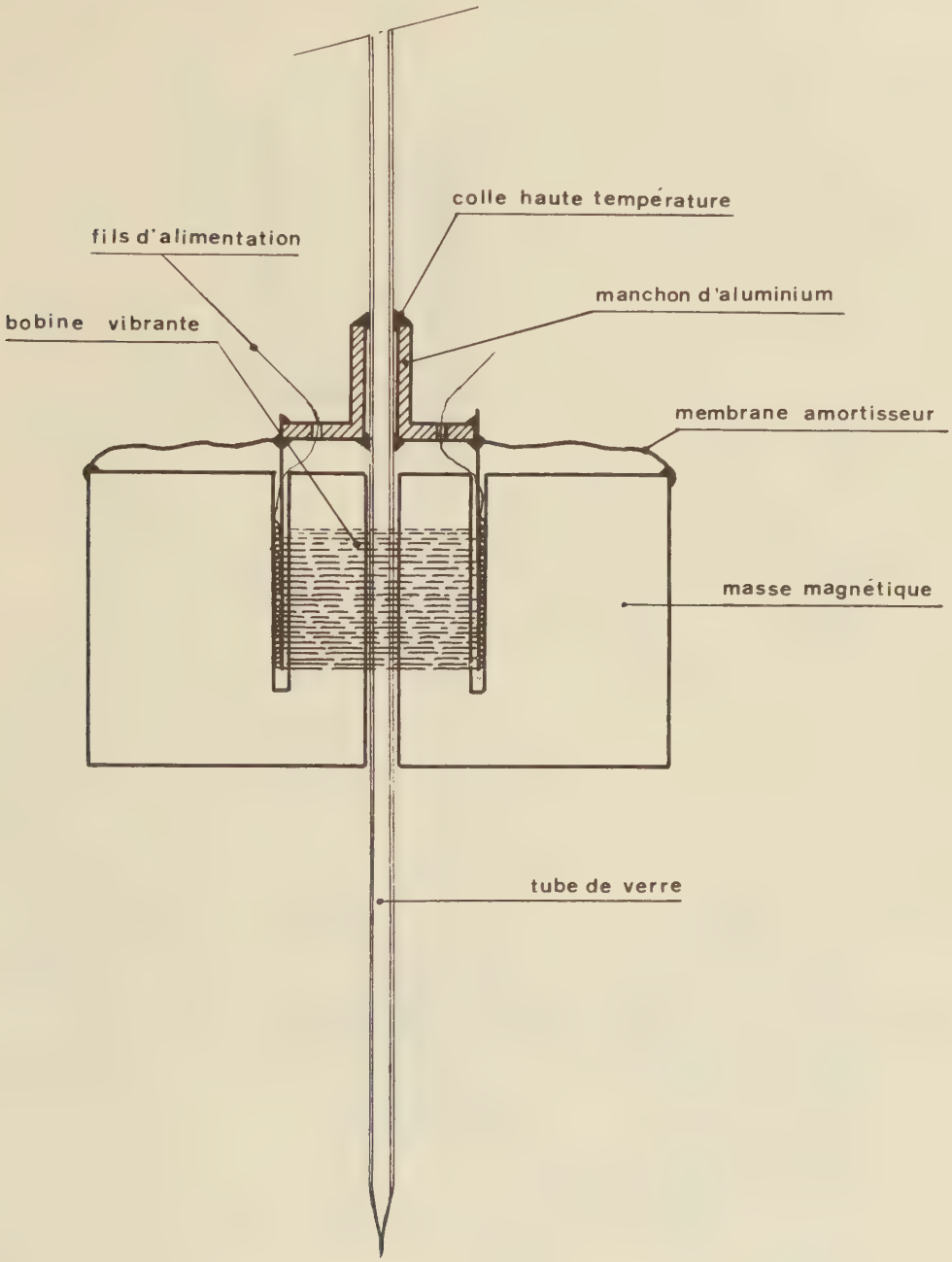


Fig 6 : SYSTEME VIBRANT

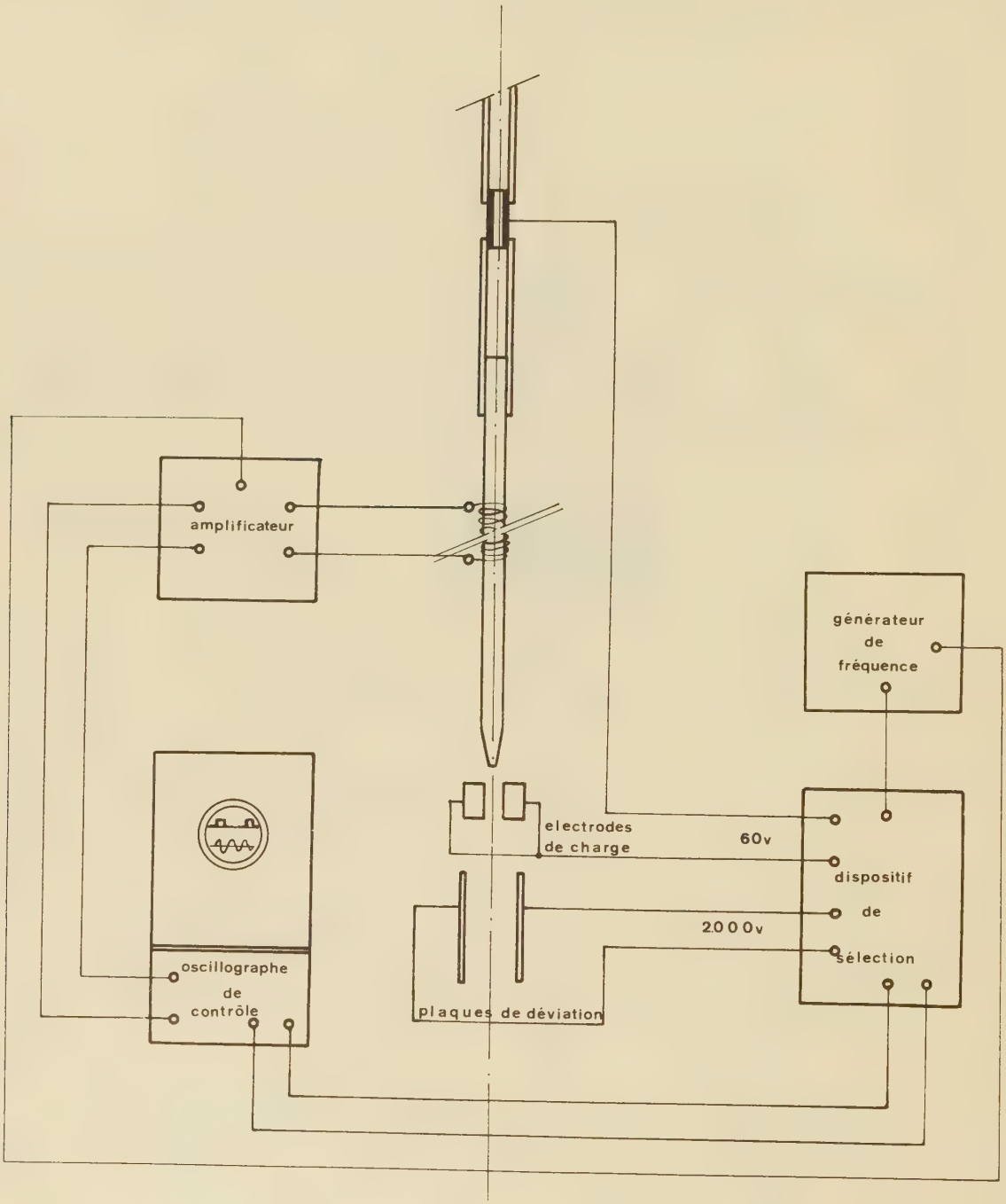


Fig 7 : DISPOSITIF DE SELECTION (principe)

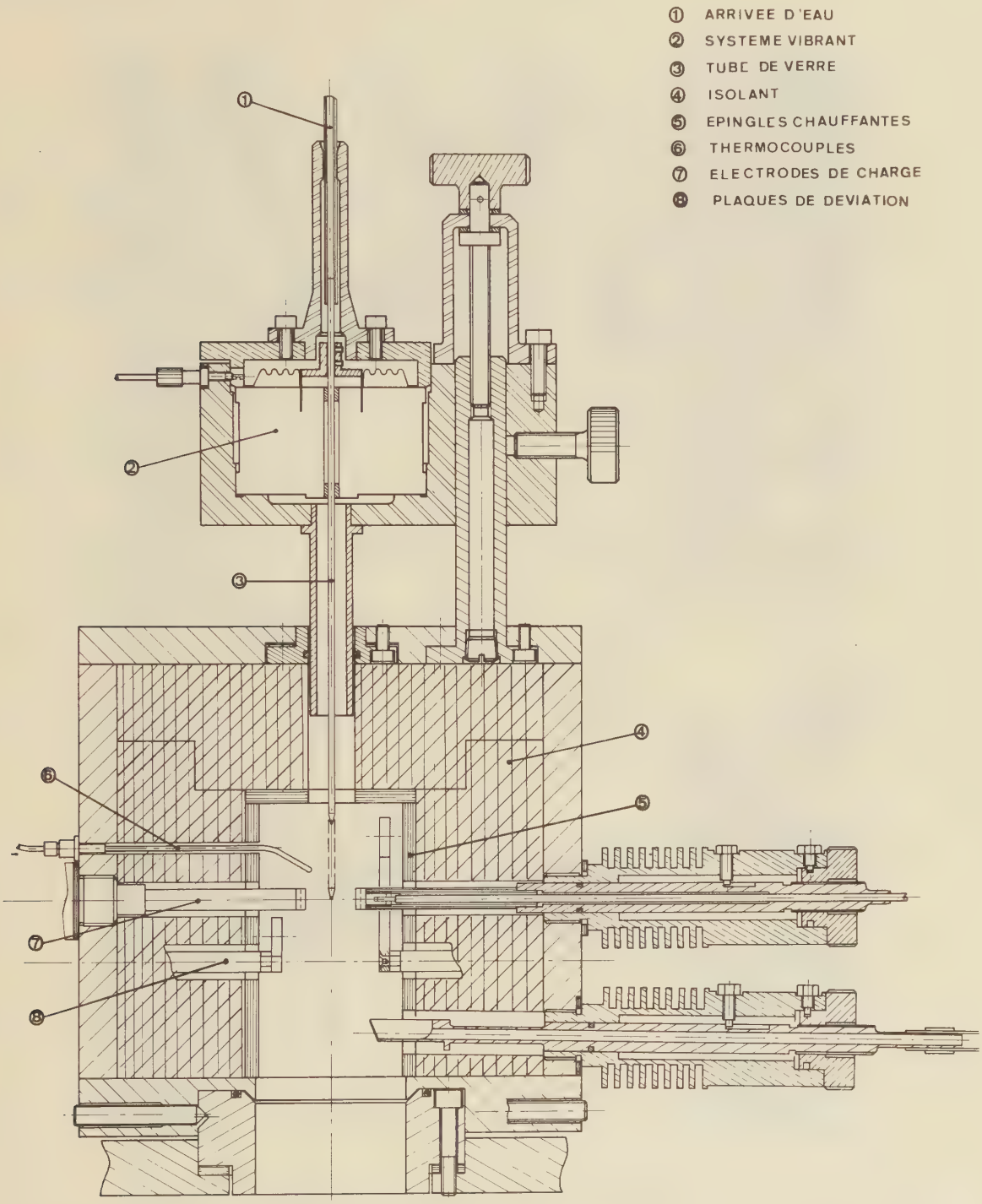


Fig 8 : DISPOSITIF DE SELECTION (réalisation)

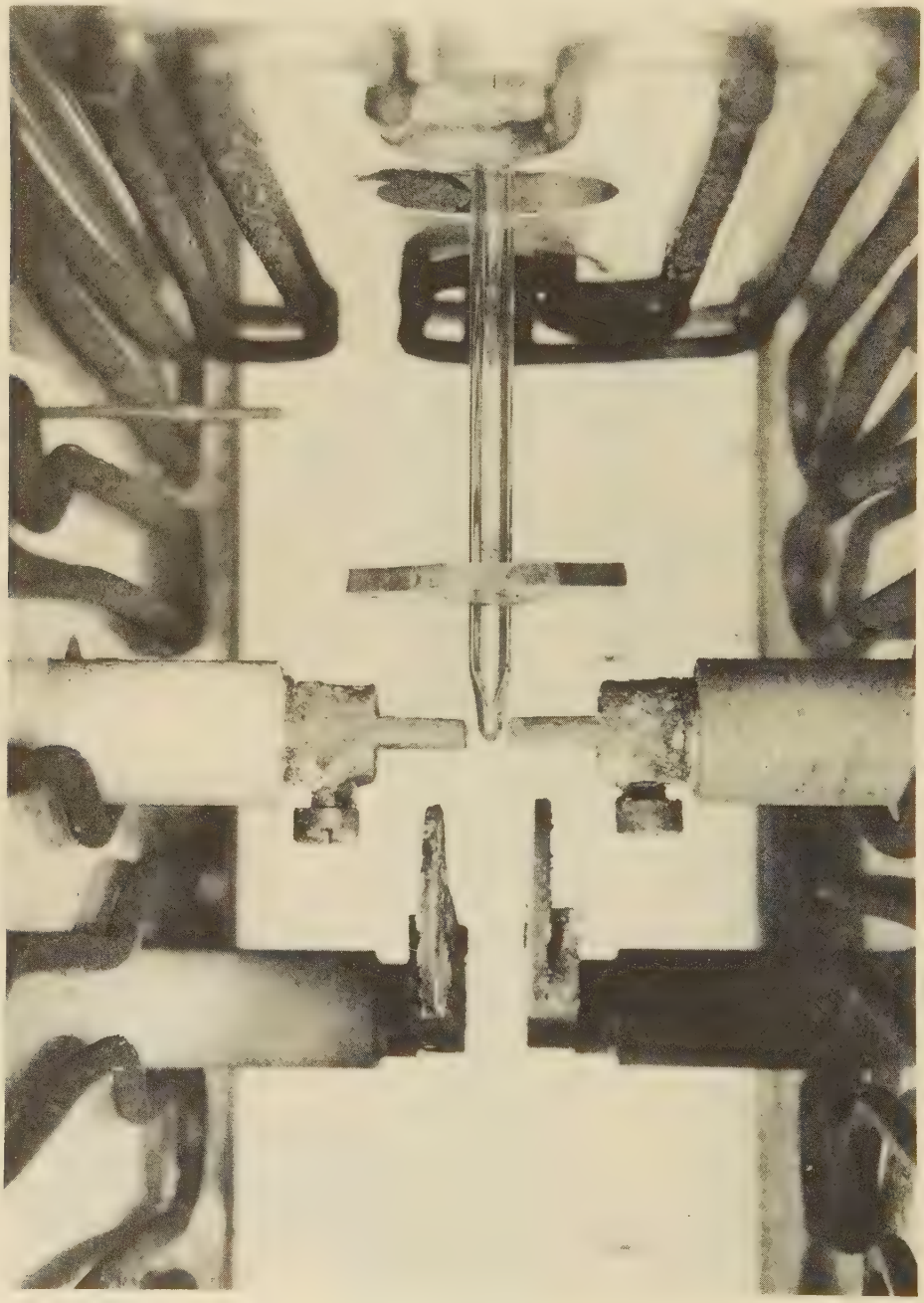


Fig9 : GENERATEUR DE GOUTTES

β) Constituants internes : dispositif électronique

Un signal sinusoïdal de fréquence réglable entre 1 kHz et 30 kHz, d'amplitude constante est délivré par un générateur et alimente un amplificateur basse fréquence de conception classique (Classe A.B) dont la puissance maximum est de 4 Watts. L'impédance de la bobine mobile est de 4,5 Ω ; pour éviter la saturation des étages d'entrée, la tension sinusoïdale ne doit pas dépasser 1.1 Volt crête.

L'ensemble du dispositif de présélection et de commande de l'électrode est constitué par :

- Un monostable ayant une largeur d'impulsion de 20 µs réalisant une mise en forme du signal.
- Un circuit à largeur variable de 20 à 320 µs.
- Un modulateur qui a pour but de convertir les impulsions de commande de + 12 V à - 60 V.
- Un compteur à prédétermination par "contraves" de 0 à 9999.
- Un circuit de déphasage introduisant un retard variable de 0 à 450 µs.
- Un circuit de synchronisation pour le stroboscope d'observation.

Les alimentations sont branchées sur le secteur 220 V alternatif 50 Hz et sont composées de :

- Une alimentation de tension positive 12 V pour les circuits logiques.
- Une alimentation de tension positive régulée 24 V pour l'amplificateur basse fréquence.
- Une alimentation haute tension négative de 60 V pour le modulateur.
- Une alimentation T H T positive et négative 2000 V.

Les caractéristiques des signaux obtenus (stabilité, retard, amplitude) sont telles que la sélection des gouttes non chargées se fait de façon aisée et répétitive. L'organisation de ces circuits logiques est présentée sur la figure 10.

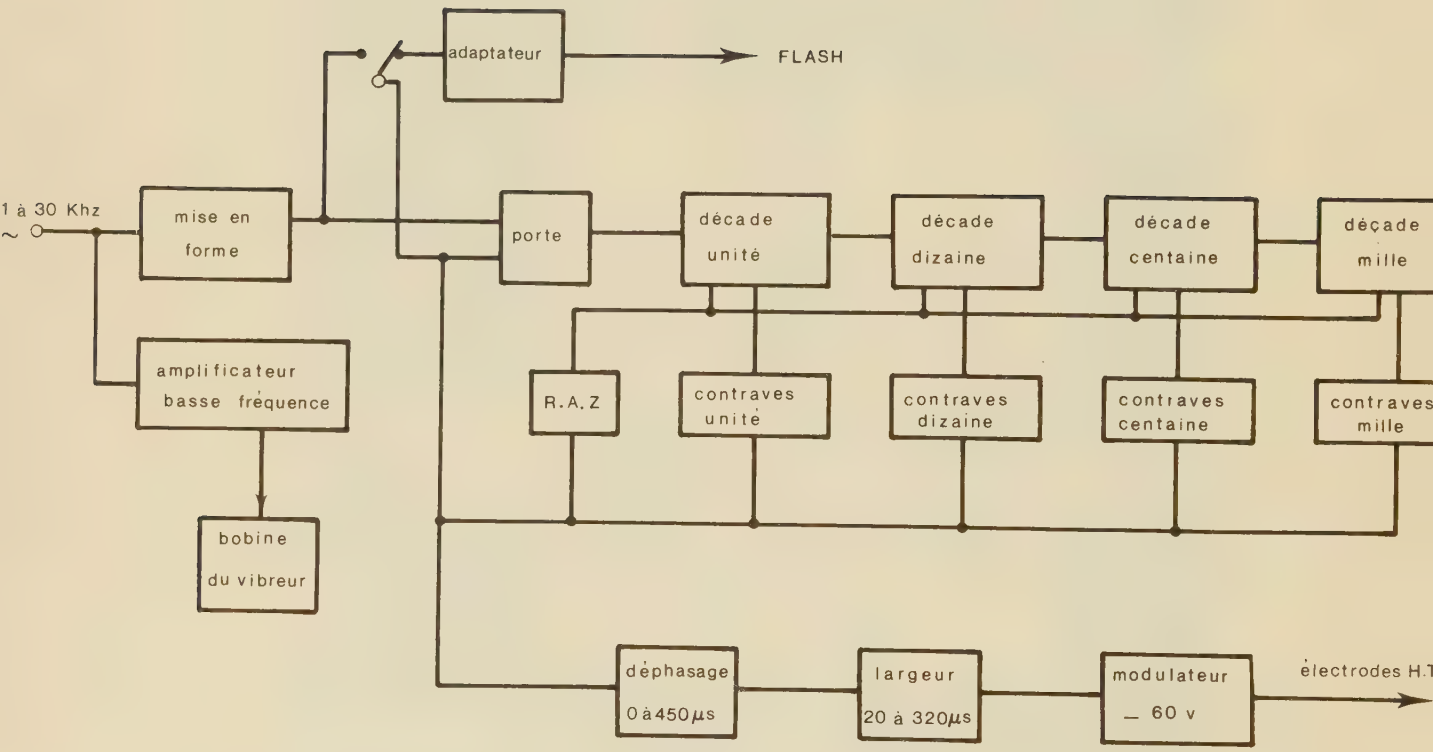


Fig 10 : DISPOSITIF ELECTRONIQUE

B - ATMOSPHERE DE VAPEUR

1) Description

La vapeur est contenue dans un cylindre de section droite rectangulaire réalisé en acier inoxydable. Nous observons les gouttes tombant en chute libre dans l'axe de ce cylindre. Deux des faces latérales et les faces horizontales de ce parallélépipède sont tapissées d'une couche isolante supportant des épingles chauffantes. Les deux autres faces latérales sont constituées par des doubles glaces de pyrex permettant l'éclairement et l'observation des gouttes. Ces glaces sont chauffées au moyen d'une résistance constituée par un fil de tungstène de 70 microns de diamètre plaquée entre les deux épaisseurs de verre pyrex. Un tel système a pour but d'éviter toute condensation de la vapeur venant gêner l'observation. Dans la partie supérieure de l'enceinte est inséré le générateur de gouttes décrit précédemment. Le réglage des positions des divers éléments de notre système est effectué au moyen de dispositifs placés à l'extérieur de l'enceinte et refroidis par des ailettes. Afin de réduire au maximum les courants de convection libre résultant de l'inhomogénéité du champ de température obtenu, nous avons placé à l'intérieur de l'enceinte un tube en pyrex de 2 millimètres d'épaisseur et de 4 centimètres de diamètre intérieur. Il peut être fermé à son extrémité inférieure et partiellement obturé à son extrémité supérieure. C'est dans l'axe de ce tube que tombent les gouttelettes. Après une période de tranquillisation, l'atmosphère à l'intérieur du tube est calme et l'observation du train de gouttes est possible.

2) Contrôle de la température

La température à l'intérieur du tube de pyrex est mesurée à différents niveaux au moyen de thermocouples Chromel-Alumel préalablement étalonnés et permettant d'obtenir une précision de 1 %. Ces thermocouples sont mobiles et nous pouvons connaître la température le long d'un diamètre d'une section du tube. En agissant sur les différentes tensions d'alimentation des épingles et des vitres chauffantes, nous parvenons après un temps suffisamment long à régler la température

à l'intérieur du tube à un degré près. Cette enceinte équipée de ses thermocouples est présentée sur les figures 11, 12 et 13.

3) Production de la vapeur

La vapeur est produite à un très faible débit dans un autoclave annexe. Son état est voisin de l'état saturé. Cette vapeur est ensuite surchauffée dans un surchauffeur de faible puissance qui amène sa température au niveau désiré. Elle est alors introduite dans l'enceinte préchauffée par un orifice situé à la base du tube de verre. Après l'avoir laissée circuler dans l'enceinte pendant un temps suffisamment long, la température à l'intérieur du tube se stabilise et nous admettons que le tube est rempli de vapeur. Nous arrêtons la circulation.

L'introduction de gouttes d'eau dans le tube de verre entraîne un écoulement de vapeur du fait de leur évaporation. Pour nos conditions expérimentales la vitesse de cet écoulement est de l'ordre du millimètre par seconde, donc parfaitement négligeable par rapport aux vitesses de chute des gouttes.

C - MOYENS D'OBSERVATION - MOYENS DE MESURE

1) Observation de la formation des gouttes

Notre phénomène étant périodique, nous avons utilisé, pour l'observer, un stroboscope à haute fréquence: DAWE 1205. La puissance de chaque éclair est faible et ne permet pas de photographier une goutte donnée. Cet appareil constitue un écran stroboscopique servant de fond lumineux à l'observation directe de la rupture du jet en gouttelettes. Pour contrôler la formation des gouttes et leur sélection, ce stroboscope peut être actionné à la fréquence de formation des gouttes ou à celle des impulsions de décharge de l'électrode. Les deux possibilités sont autorisées par le système électronique. Les gouttes sont

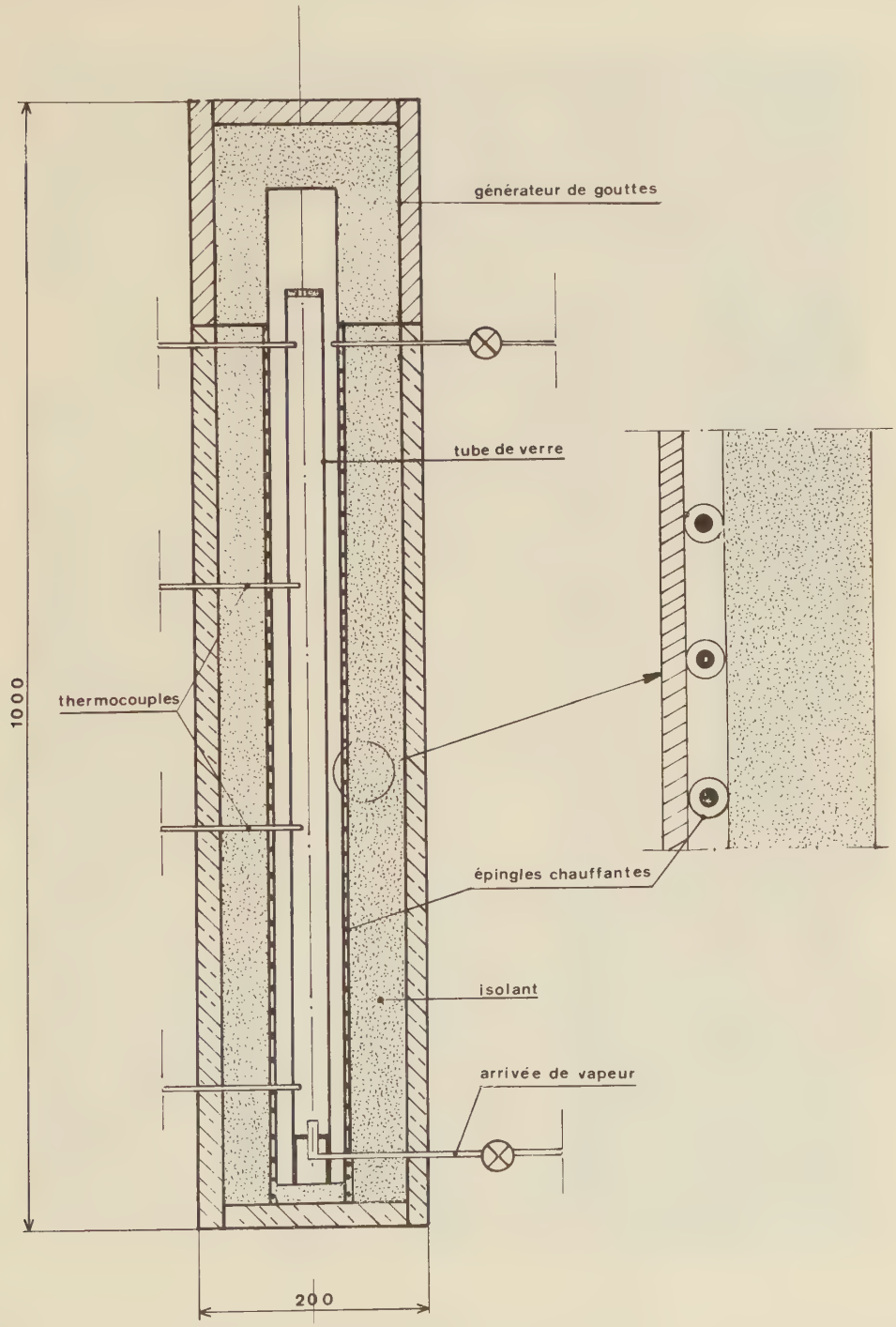


Fig11: ATMOSPHERE DE VAPEUR (ech $\frac{1}{10}$)

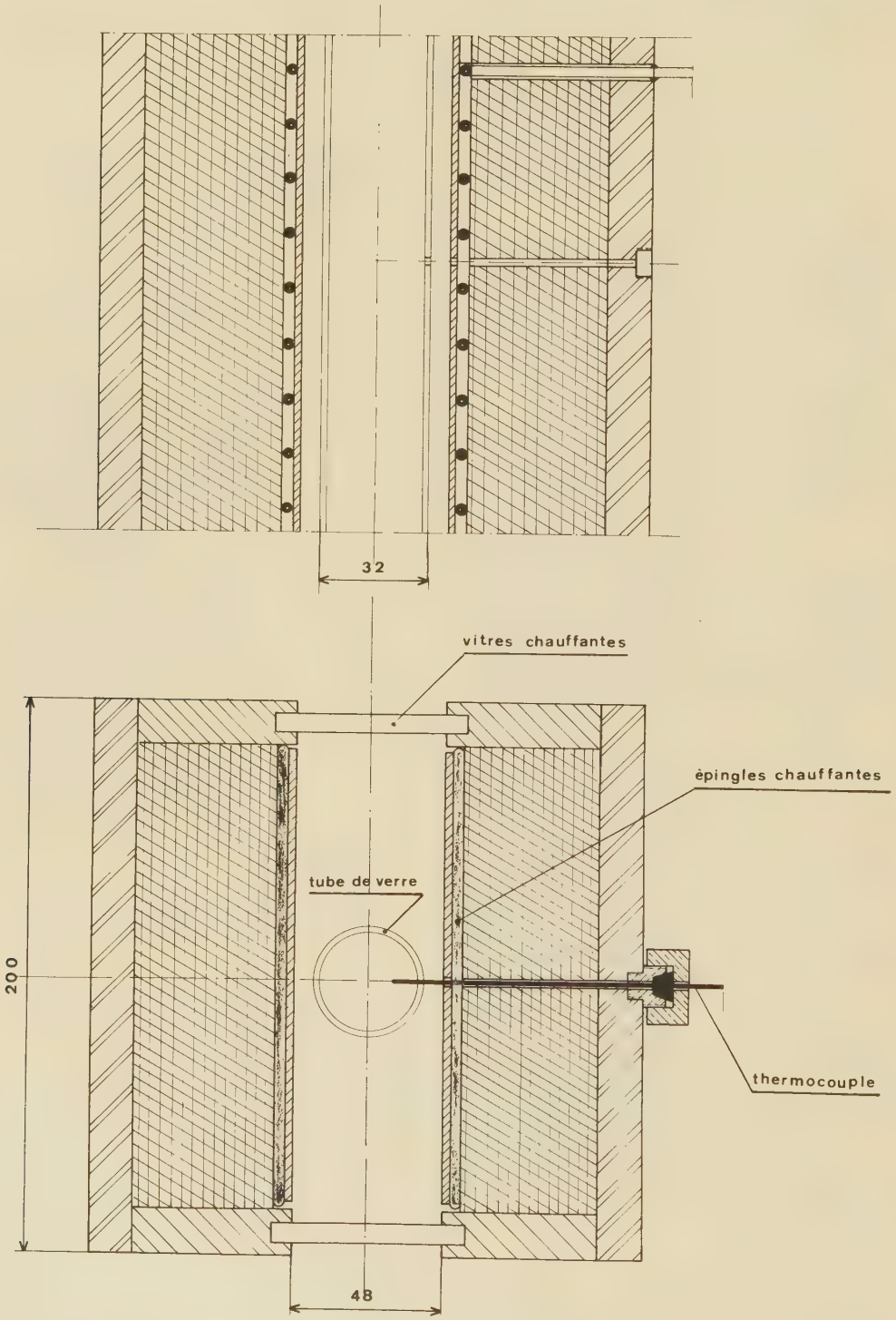


Fig 12 : ATMOSPHERE DE VAPEUR (détails de réalisation)

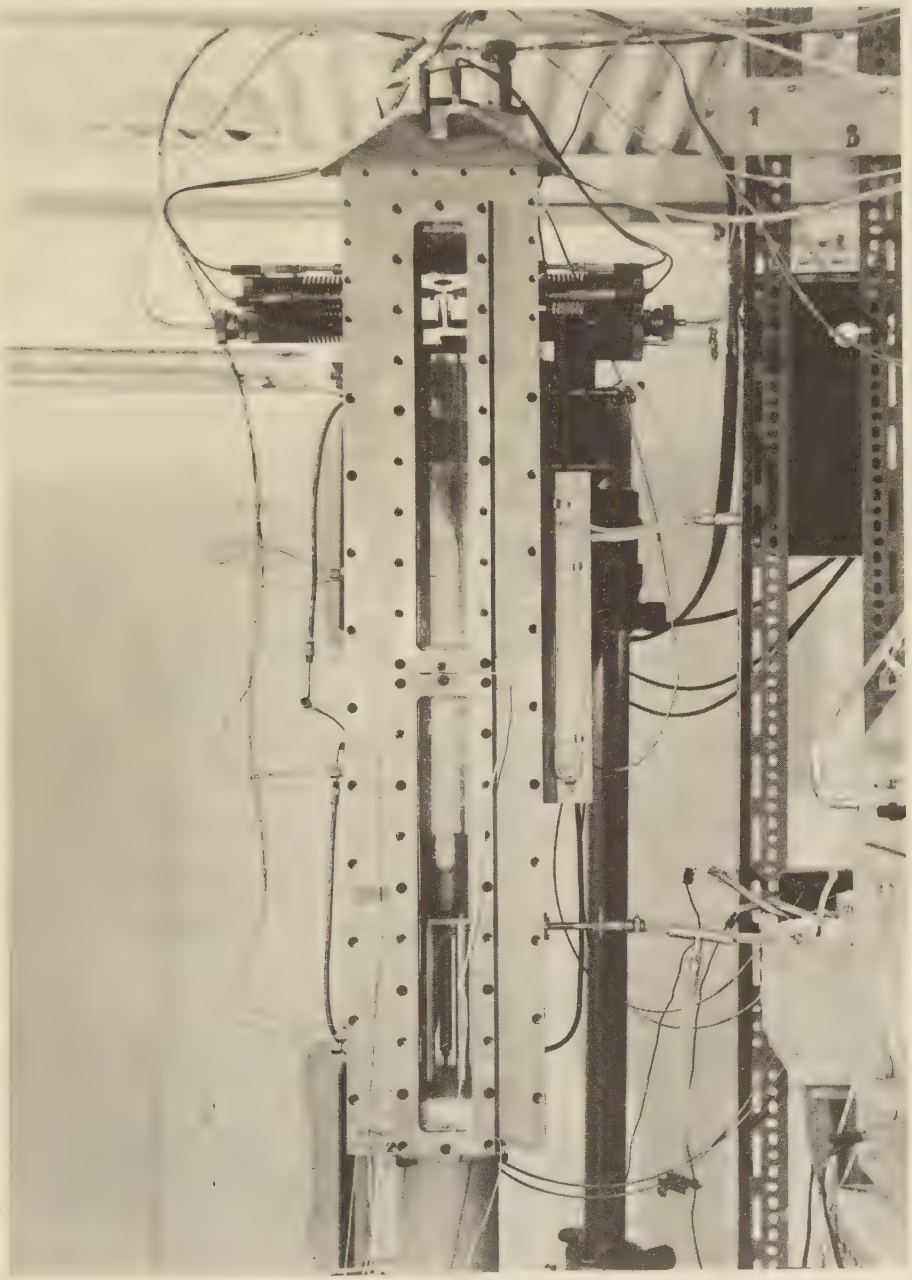


Fig 13 : ATMOSPHERE DE VAPEUR (réalisation)

observées au moyen d'une simple lunette de grandissement X 6 . Ce dispositif nous permet d'observer les différents régimes d'instabilité du jet. Il nous permet surtout pour un jet donné de régler la fréquence de vibration et les positions relatives du jet, de l'électrode et des plaques de déviation afin d'obtenir un train de gouttes stables rapidement sélectionnées.

2) Observation de l'évolution des gouttes

Le train de gouttes non déviées tombant en chute libre dans une atmosphère calme a l'apparence d'un jet extrêmement ténu que nous nous proposons de photographier. Pour connaître à une distance donnée de l'orifice d'injection le diamètre de la goutte et sa vitesse, nous utilisons une technique de photographie à double éclair.

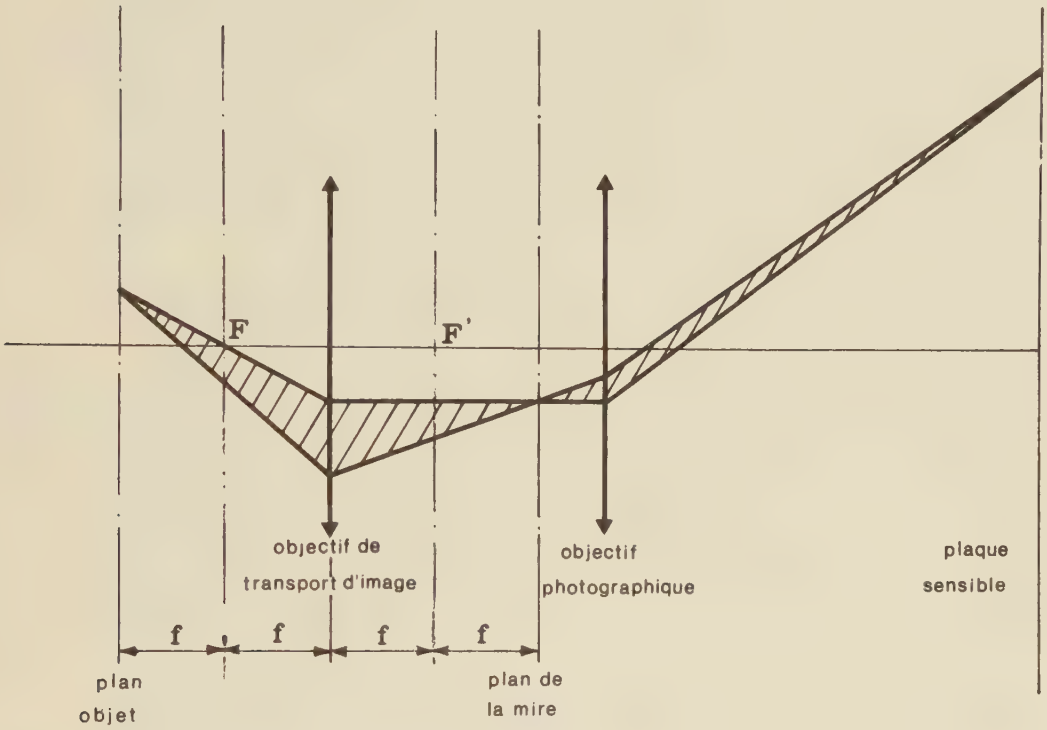
a) Dispositif d'éclairement :

Un générateur à deux impulsions successives "Impuls-Physik" permet d'obtenir deux éclairs consécutifs séparés par un intervalle de temps dont la durée peut être ajustée entre 2 µs et 2 secondes. La durée de chaque éclair est de 250 nanosecondes, ce qui correspond pour nos expériences à une incertitude relative inférieure à 1 % sur les diamètres observés. La mesure de la distance parcourue par la goutte entre les deux éclairs et la connaissance de l'intervalle de temps séparant les deux impulsions permettent de déterminer la vitesse instantanée de la goutte. Le générateur d'éclairs est équipé d'un condenseur permettant d'obtenir un faisceau de lumière incidente parallèle et la puissance de chaque éclair est suffisante pour permettre de photographier une goutte donnée sur le fond lumineux ainsi obtenu.

b) Dispositif optique :

Les gouttes tombant à l'intérieur d'une enceinte fermée, la distance frontale (distance entre l'objet et la première lentille) de notre système doit être supérieure à 10 centimètres, ce

qui est incompatible avec une observation directe par des moyens optiques classiques. Nous avons donc effectué un transport d'image à l'extérieur de l'enceinte sur une mire gravée que nous photographions.



DISPOSITIF OPTIQUE

Dans ce but, nous utilisons un objectif de distance focale f = 7.5 cm, dont nous réglons la position par rapport aux gouttes au moyen du dispositif décrit plus loin de telle manière que les gouttes se trouvent à la distance f du plan focal objet de l'objectif. A la distance f du plan focal image, nous plaçons une mire gravée en 1/10ème de millimètre. Une image réelle est formée en vraie grandeur dans le plan de la mire et l'ensemble est photographié au moyen d'une chambre classique de prise de vue LINHOFF où l'image définitive vient se former

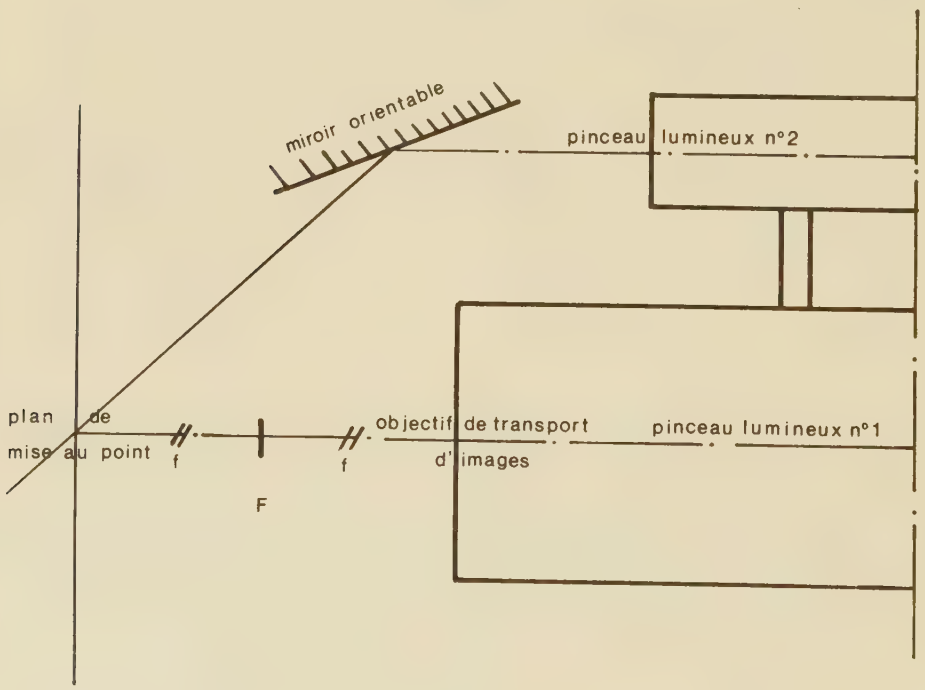
sur une plaque polaroïd de sensibilité 400 ASA que nous analysons. Notre dispositif a pour caractéristiques :

Grandissement ..... : x 10,
Diamètre du champ objet .... : 1 cm.

La plaque sensible est dévoilée juste avant la prise de vue et les éclairs successifs jouent le rôle d'obturateur.

c) Réglage de la distance frontale :

Nous avons réalisé un dispositif qui nous permet de régler la position du jet par rapport à l'appareil de manière à obtenir dans le plan de la mire une image réelle en vraie grandeur.



REGLAGE DE LA DISTANCE FRONTALE

Un pinceau lumineux issu d'une source placée devant l'objectif photographique matérialise l'axe optique du système. Un autre pinceau issu d'une source latérale est dévié par un miroir orienté au préalable de telle sorte que ce pinceau vienne rencontrer le précédent à la distance 2 x f du plan focal objet. L'intersection du jet de gouttes non déviées par l'un ou l'autre de ces faisceaux se traduit par une tache lumineuse facile à observer. Il suffit alors de déplacer l'ensemble du système optique jusqu'à ce que les deux taches lumineuses résultant de chacun des faisceaux viennent en coincidence. Nous sommes alors sûrs que les gouttes sont dans le champ objet et que leur image est formée en vraie grandeur dans le plan de la mire.

d) Analyse des photographies :

Les prises de vue sont examinées à l'aide d'un microscope de faible puissance équipé d'un réticule et pouvant se déplacer suivant deux directions orthogonales. Les déplacements sont mesurés avec une précision de 20 µ. Le grandissement est contrôlé par une mesure de l'écart entre les images de deux traits de la mire. La valeur de celui-ci étant de 10, l'erreur commise sur la mesure des distances dans l'espace objet est de quelques microns ($< 5\mu$).

La figure 14 présente une prise de vue réalisée avec deux éclairs séparés par un intervalle de 0.1 m/s. La goutte ainsi photographiée a un diamètre de 96 µ et une vitesse de 3 m/s.

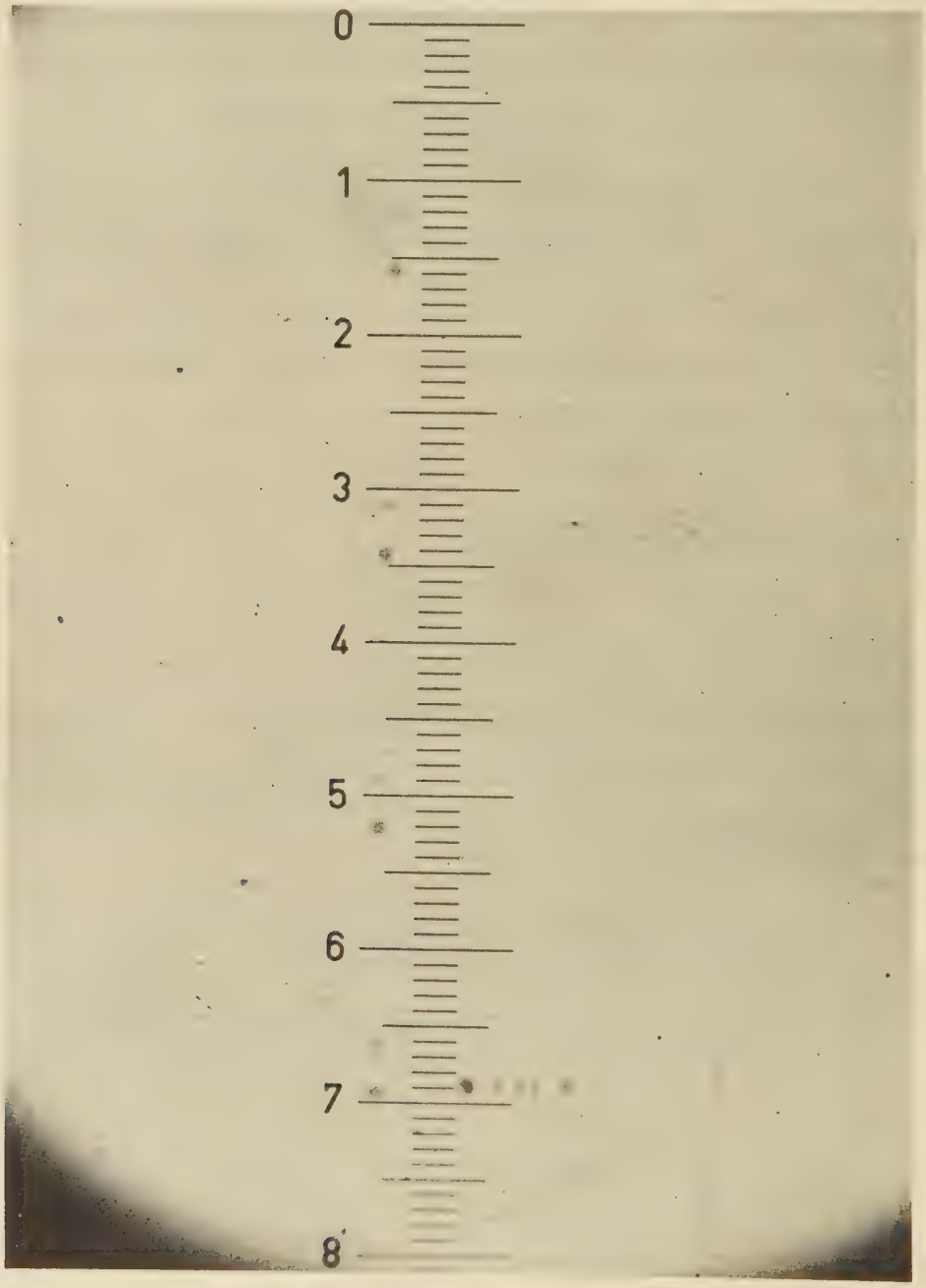


Fig 14 : MESURE DE VITESSE

III - DEROULEMENT D'UNE EXPERIENCE

Une fois établies les conditions de température désirées dans l'enceinte, nous y envoyons un jet capillaire. Nous réglons la rupture de ce jet en gouttes, déviées ou non, au moyen du dispositif décrit ci-dessus en contrôlant le phénomène à l'aide du stroboscope. Nous réglons au moyen du dispositif de sélection l'intervalle entre gouttes non déviées afin d'empêcher leurs coalescences tout au long de leur trajectoire tout en ayant une bonne probabilité d'observer une goutte dans le champ objet. A une distance donnée de l'orifice d'injection, nous réglons notre dispositif optique et, l'intervalle entre éclairs étant fixé, nous réalisons une double exposition d'une plaque polaroïd. L'examen de cette plaque et la connaissance de l'intervalle entre éclairs nous permettent d'obtenir le diamètre de la goutte et sa vitesse instantanée en un point donné de la trajectoire. L'ensemble de ces valeurs mesurées, pour des conditions fixées de température et de pression, tout au long de la trajectoire commune des gouttes constitue le résultat d'une expérience.

IV - PRECISION DES MESURES

A. MESURES DE VITESSE

L'intervalle entre 2 éclairs consécutifs est mesuré avec une incertitude absolue inférieure à 1 μs . La distance parcourue par la goutte durant cet intervalle est mesurée à 5 microns près (II C-2-d). Dans la majeure partie des expériences, cette distance est de l'ordre d'une fraction de mm, et cet intervalle de temps de l'ordre d'une milliseconde. Il en résulte une incertitude relative sur la mesure de la vitesse instantanée.

$$\frac{\Delta V}{V} \leqslant 3\ \%$$

B. MESURES DE DIAMETRES

Le phénomène d'instabilité qui est à la base de notre dispositif de production est parfaitement périodique. L'observation de la dissociation du jet capillaire en gouttes au moyen d'un stroboscope synchronisé en apporte la preuve. Nous pouvons donc déterminer la taille d'une goutte à partir de la mesure du débit d'eau et de la fréquence de la vibration appliquée au jet. L'incertitude relative sur la valeur du diamètre ainsi obtenue est inférieure à 1/1000 . Une telle mesure est donc excellente mais n'est possible que dans des conditions expérimentales particulières pour lesquelles les gouttes ne s'évaporent pas et sont directement accessibles. Cette méthode de mesure permet par contre d'estimer l'incertitude absolue commise sur la mesure du rayon effectuée par la méthode optique décrite antérieurement. Pour des conditions expérimentales fixées, dans l'air calme, à la pression atmosphérique et à la température ambiante, on a effectué plusieurs déterminations successives du diamètre des gouttes en utilisant la méthode optique. La comparaison de ces mesures avec celles résultant des mesures de débit et de fréquence permet de calculer un écart type et d'en déduire une estimation de l'incertitude absolue sur la mesure du diamètre d'une goutte. On a trouvé que cette incertitude absolue sur le diamètre était inférieure à 5 microns.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.W. STRUTT : Lord RAYLEIGH. On the instability of jets.
Proceedings of the London mathematical Society. 1879, X , p. 4-13.

[2] N.R. LINBLAD,J.M. SCHNEIDER. Production of uniform sized droplets.
J. of Scientific Instruments 1965, Vol. 42.

[3] J.M. SCHNEIDER, C.D. HENDRICKS. Source of uniform sized droplets.
The Review of Scientific Instruments 1964, Vol. 35, n°10.

[4] C.O. PEDERSEN. An experimental study of the dynamic behaviour and heat transfer characteristics of water droplets impinging upon a heated surface.
Int.J. of Heat and Mass transfer. 1970 , Vol.13 p. 369-381.

[5] M. C. YUEN. Non linear capillary instability of a liquid jet.
Journal of Fluid Mechanics. 1968 33-1, p. 151-163.

[6] D.F. RUTLAND, G.J. JAMESON. Theoretical prediction of the size of drops formed in the break up of capillary jets.
Chemical Engineering Science 1970, Vol. 25, p. 1689 - 1698.

[7] W. DIAMANT. Etude photo-micrographique de la pulvérisation de combustibles liquides au sein d'une chambre de combustion.
Chaleur Industrie. 1961, N° 436.

Chapitre IV

Résultats expérimentaux

[9] [10]

S O M M A I R E

Pages

I - GENERALITES 191

II - CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES DES GOUTTES EN L'ABSENCE D'EVAPORATION

A - FREINAGE D'UNE GOUTTE 192

1. Généralités 192

2. Expériences 193

3. Analyse 193

4. Résultats 195

B - INTERACTION DES GOUTTES 199

1. Généralités 199

2. Expériences 200

3. Analyse 200

4. Résultats 200

III - EVAPORATION DES GOUTTES 203

A - GENERALITES 203

B - EXPERIENCES 203

1. Caractéristiques des essais 203

2. Réglage des observations 203

3. Résultats 205

C - ANALYSE 205

D - COMPARAISON AVEC LA THEORIE 207

IV - CONCLUSION 209

NOTATIONS

		Dimension
e	Ecart entre gouttes	L
g	Accélération de la pesanteur	$L\,T^{-2}$
k	Conductivité thermique	$M\,LT^{-3}\,\theta^{-1}$
t	Temps	T
v	Vitesse	$L\,T^{-1}$
x	Distance parcourue	L
F	Résultante des forces	$M\,LT^{-2}$
Cp	Chaleur spécifique	$L^2\,T^{-2}\,\theta^{-1}$
H	Enthalpie massique	$L^2\,T^{-2}$
$\mathfrak{L}$	Chaleur latente de vaporisation	$L^2\,T^{-2}$
M	Masse d'une goutte	M
R	Rayon d'une goutte	L
V	Vitesse	$L\,T^{-1}$
η	Viscosité dynamique de la vapeur	$ML^{-1}\,T^{-1}$
ρ	Masse volumique	$M\,L^{-3}$
Γ	Accélération	$L\,T^{-2}$

Indices

$\cdot_L$ caractérise le liquide

$\cdot_G$ caractérise la vapeur

Paramètres sans dimensions

A_c $\dfrac{\Gamma R}{V^2}$ paramètre d'accélération

B $\dfrac{H - H_{sat}}{\mathcal{L}}$ paramètre de surchauffe de la vapeur

C_D $F / \pi R^2 \frac{1}{2} \rho_G V^2$ Coefficient de traînée

Re $\dfrac{2 R V \rho_G}{\eta}$ Nombre de REYNOLDS (construit sur le diamètre)

Pr $C_{P_G} \eta / K_G$ Nombre de PRANDTL

Pe Re . Pr Nombre de PECLET (construit sur le diamètre)

I - GENERALITES

Plusieurs séries d'expériences effectuées dans divers milieux pour différentes conditions de température nous ont permis d'obtenir des résultats que nous pouvons grouper en deux catégories.

- D'une part, nous avons profité de la souplesse d'utilisation et de la facilité de mise en oeuvre du générateur de gouttes décrit au chapitre précédent pour acquérir certains résultats expérimentaux originaux concernant le comportement dynamique de gouttes en l'absence d'évaporation. Ces résultats, obtenus dans l'air à la pression atmosphérique, ont permis de préciser les conditions d'étude des gouttes ainsi formées.

- D'autre part, nous avons analysé le comportement d'une goutte tombant en chute libre dans une atmosphère calme de vapeur surchauffée durant une grande partie de son évaporation. Ces observations directes de gouttes en cours d'évaporation constituent des expériences originales qui sont caractérisées par des nombres de REYNOLDS inférieurs à 1,3 et des paramètres caractéristiques de la surchauffe de la vapeur compris entre 0.02 et 0.1 . Nous nous sommes limités à des conditions expérimentales aussi simplifiées que possible pour tenter de juger de la validité des résultats théoriques obtenus précédemment.

II - CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES DES GOUTTES EN L'ABSENCE D'EVAPORATION

Ces résultats ont été obtenus dans l'air à la pression atmosphérique à une température de 20°C.

A - FREINAGE D'UNE GOUTTE

1. Généralités

Nous nous proposons d'étudier le coefficient de traînée d'une goutte en mouvement non permanent. Pour de très faibles valeurs du nombre de REYNOLDS construit à partir du diamètre, le coefficient de traînée d'une goutte sphérique animé d'un mouvement quelconque peut être calculé directement :

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho_G V^2} = 6\pi\eta R V + \frac{2}{3}\pi\rho_G R^3 \frac{dV}{dt} + 6R^2\sqrt{\pi\eta\rho_G}\int_0^t \frac{dV}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

Le premier terme représente la résistance opposée par le milieu à une goutte animée d'une vitesse uniforme V. Les deux derniers, terme de masse ajoutée et terme de BASSET représentent la résistance du milieu du fait de l'énergie dépensée pour mettre ce milieu en mouvement. Ces deux termes sont proportionnels à la masse volumique du fluide ambiant. Dans le cas qui nous intéresse ici $(\frac{\rho_G}{\rho_L} \ll 1)$, ils sont négligeables devant l'inertie de la goutte. On admet en première approximation qu'il en est de même lorsque le calcul n'est plus possible $(Re > 1)$ et que la force de traînée exercée sur la goutte est la même que le mouvement soit uniforme ou non. Ceci est une hypothèse et les résultats expérimentaux concernant ce problème sont rares et contradictoires [1] [2] [3]. C'est pourquoi nous avons utilisé notre dispositif de production et d'observation pour déterminer le coefficient de traînée d'une goutte en mouvement retardé. Ces résultats permettront de préciser les conditions d'observation des gouttes dont nous étudierons l'évaporation.

2. Expériences

Le dispositif expérimental mis au point délivre des gouttes de taille bien déterminée. Leur vitesse initiale est supérieure à la vitesse limite de chute correspondant à leur diamètre. Ces gouttes sont freinées et leur vitesse va diminuer jusqu'à ce qu'elle soit égale à cette vitesse limite. Nous avons observé des gouttes de caractéristiques initiales identiques délivrées par le générateur et nous avons mesuré leur vitesse en différents points de leur trajectoire commune parcourue durant la période de freinage. Les résultats concernant des gouttes de 105 μ, 132 μ et 212 μ de diamètre sont présentés sur les tableaux 1, 2, 3 et sur la figure 1 où nous avons, pour différentes tailles de gouttes, tracé la variation de la vitesse de chute en fonction de la distance parcourue.

3. Analyse

Si nous supposons que la vitesse et l'accélération instantanées d'une goutte donnée représentent à chaque instant son état dynamique, nous pouvons effectuer une analyse dimensionnelle simple du phénomène. La relation :

$$\Phi (\vec{V}, \vec{\Gamma}, R, \eta, \rho, \vec{F}) = 0$$

relie les divers paramètres qui sont la vitesse V, l'accélération Γ, le rayon R de la goutte, la viscosité dynamique η, la masse volumique ρ du milieu extérieur et la force F exercée par ce milieu sur la goutte. L'analyse dimensionnelle conduit à la relation suivante :

$$C_D = C_D [Re, A_c]$$

avec $C_D = \dfrac{F}{\pi R^2 \rho_G \frac{V^2}{2}}$, coefficient de traînée instantané de la goutte,

$R_e = \dfrac{2 V R \rho_G}{\eta}$, nombre de REYNOLDS instantané et $A_c = \dfrac{\Gamma R}{V^2}$, paramètre représentatif de l'accélération instantanée de la goutte. Le nombre de REYNOLDS instantané est obtenu immédiatement à partir des mesures de vitesses des gouttes et l'accélération instantanée est mesurée par la demie dérivée du carré de la vitesse par rapport à la distance par-

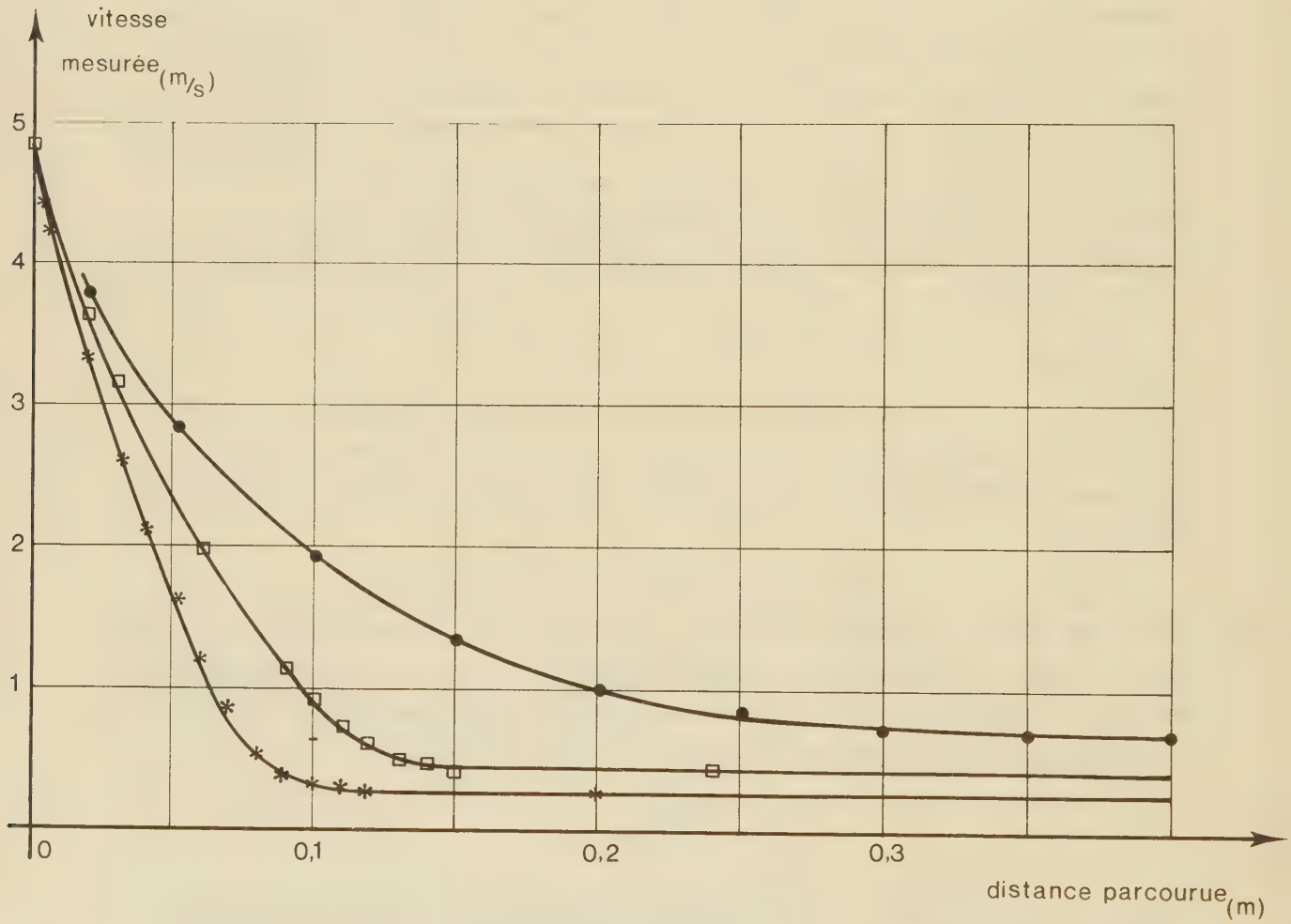


Fig1: FREINAGE DES GOUTTES

courue $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{dx}$. On en déduit le paramètre d'accélération $A_c = \frac{R}{2V^2}\frac{dV^2}{dx}$. L'équation du mouvement de la goutte s'écrit :

$$\frac{4}{3}\pi\rho_L R^3 \frac{\vec{dV}}{dt} = \vec{F} + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_L \vec{g}$$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces exercées par le milieu sur la goutte à l'instant t. On en déduit le coefficient de traînée.

$$C_D = \frac{|\vec{F}|}{\frac{\pi R^2}{2}\rho_G V^2} = \frac{8}{3}\frac{\rho_L}{\rho_G}\left|\frac{1}{2}\frac{dV^2}{dx} - g\right| \qquad 170$$

Les expériences effectuées fournissent les valeurs de la vitesse et de l'accélération en chaque point et permettent ainsi d'obtenir directement les valeurs de C_D, Re , A_c. Nous pouvons donc préciser l'allure de la fonction $C_D = C_D\,(Re\ ,\ A_c\ )$ dans le domaine étudié.

4. Résultats

Les paramètres Re et A_c étudiés ici appartiennent au domaine de variation suivant

$$1 < Re < 50$$
$$0 < A_c < 3 \cdot 10^{-3}$$

que nous avons représenté sur la figure 2. Notre dispositif expérimental nous empêche de fixer a priori le paramètre A_c et le nombre réduit de valeurs obtenues ne nous a pas permis de faire une étude systématique de l'influence de A_c sur le coefficient de traînée C_D . Par contre, nous avons pu étudier pour cette gamme étroite de paramètres d'accélération la variation du coefficient de traînée en fonction du nombre de REYNOLDS instantané. Les résultats sont présentés sur la figure 3. Nous avons indiqué, outre la courbe correspondant à la formule de STOKES, $C_D = \frac{24}{Re}$,celle correspondant à la formule de KLYACHKO [7] $C_D = \frac{24}{Re} + \frac{4.}{\sqrt[3]{Re}}$ qui rend

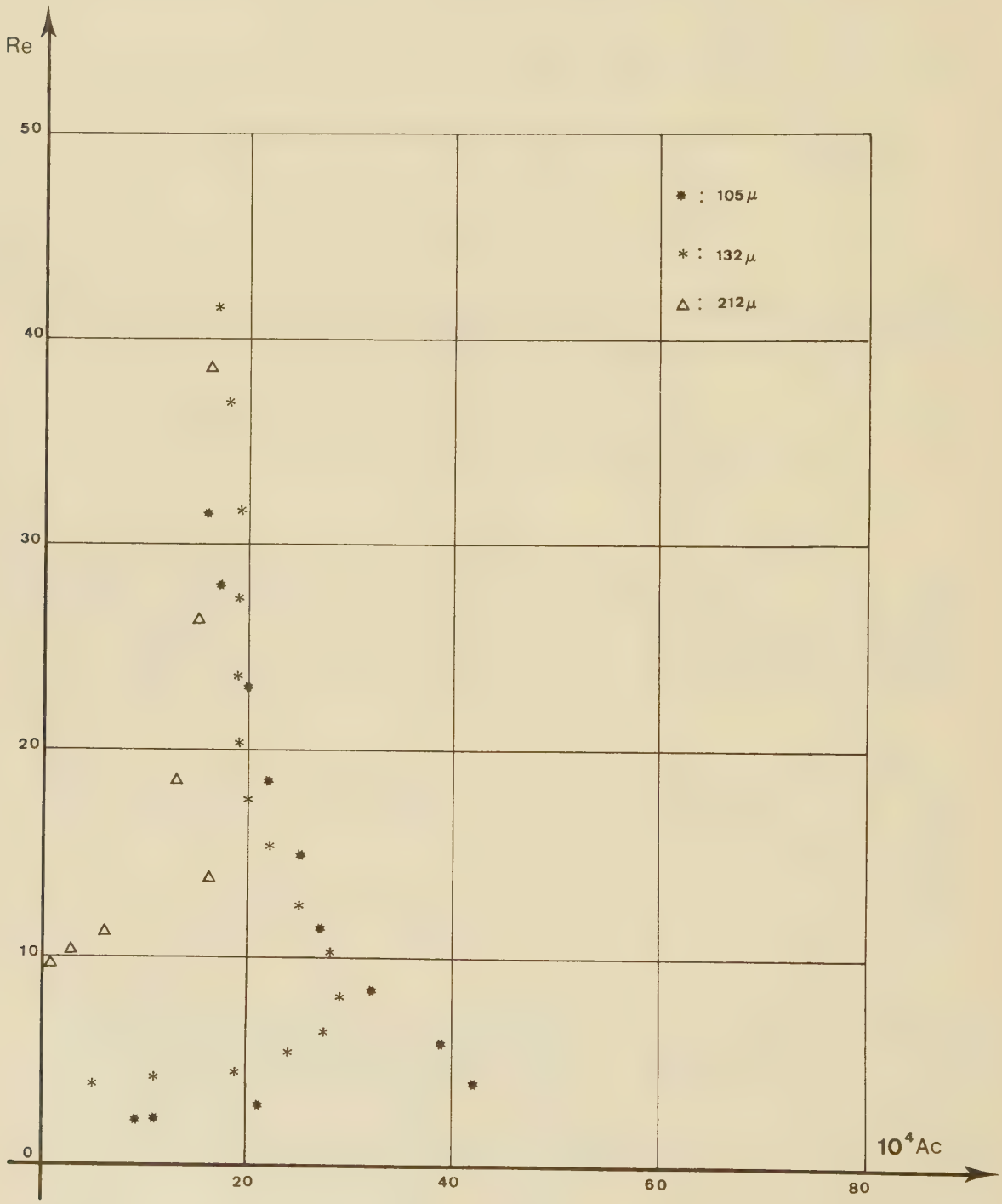


Fig 2 : FREINAGE D'UNE GOUTTE (domaine étudié)

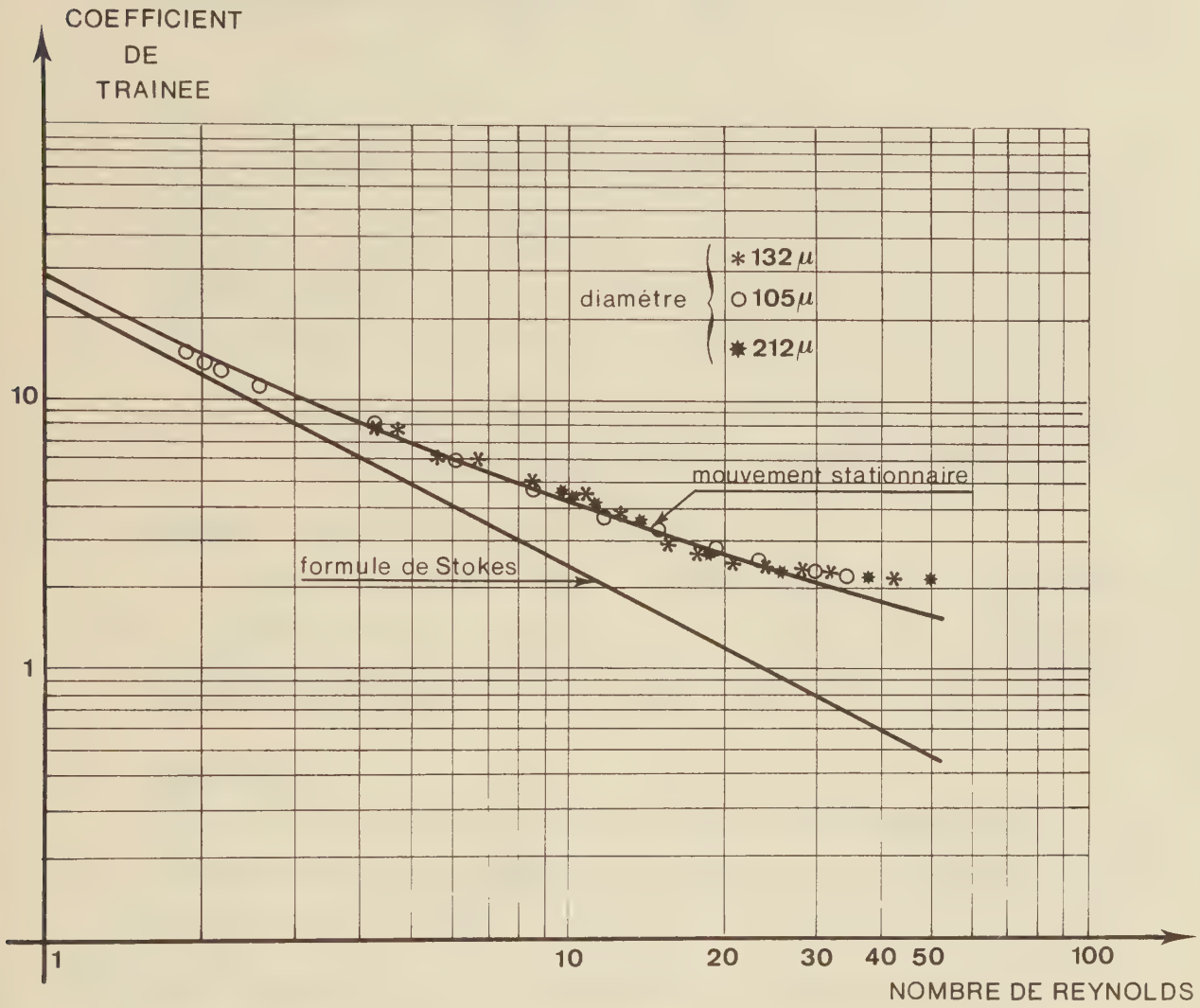


Fig 3 : COEFFICIENT DE TRAINEE
DURANT LA PERIODE DE FREINAGE

compte des résultats expérimentaux concernant le coefficient de traînée d'une goutte en mouvement uniforme pour des nombres de REYNOLDS inférieurs à 100.

Nous remarquons que les points expérimentaux correspondant à cette gamme étroite de valeurs du paramètre d'accélération sont alignés sur une même courbe. Nous observons qu'il n'y a pas de différence notable entre les résultats obtenus en mouvement uniforme et ceux obtenus en mouvement non uniforme jusqu'à une valeur du nombre de REYNOLDS égale à 20. Au-delà de cette valeur, pour des nombres de REYNOLDS inférieurs à 50, le coefficient de traînée d'une goutte freinée apparaît supérieur à celui d'une goutte animée d'un mouvement uniforme. Cet écart reste toutefois inférieur à 20 % dans le domaine étudié.

Il est remarquable que la valeur 20 du nombre de REYNOLDS correspond à l'apparition derrière la goutte des premiers tourbillons stationnaires [8] . Ceci nous incite à penser que l'accélération a pour effet principal de modifier la forme du sillage de la goutte et que cette modification entraîne une augmentation du coefficient de traînée.

Si nous supposons que le coefficient de traînée ne dépend pas de l'accélération du mouvement, il est aisé de calculer la distance de freinage définie comme la distance parcourue par la goutte avant d'atteindre sa vitesse limite à 1 % près. Ce calcul dans lequel nous utilisons la formule empirique de KLYACHKO est réalisé dans l'annexe (A.IV) Le tableau suivant présente une comparaison entre les distances de freinage calculées par cette méthode et celles déterminées directement à partir de nos résultats expérimentaux.

Diamètre (m)	Nombre de REYNOLDS initial	Nombre de REYNOLDS limite Re_L	Distance de freinage calculée (m)	Distance de freinage mesurée (m)
105×10^{-6}	33	1.9	0.12	0.11
132×10^{-6}	43	3.5	0.19	0.15
212×10^{-6}	51	10	0.38	0.30

Nous constatons que cette méthode de calcul conduit à une évaluation par excès des distances réellement parcourues ; l'approximation est d'autant meilleure que le nombre de REYNOLDS construit sur la vitesse limite de chute est plus petit.

B - INTERACTION DES GOUTTES

1. Généralités

Les actions entre gouttes ou particules sphériques se déplaçant suivant la ligne joignant leurs centres ont été étudiées depuis longtemps expérimentalement et théoriquement [4] , [5] . Les interactions de deux gouttes ont pour conséquence une augmentation de leurs vitesses et les études entreprises conduisent à une détermination de cet accroissement de vitesse en fonction de la distance des centres. Toutefois, ces résultats ne sont valables que dans le cadre des hypothèses de STOKES ($Re \ll 1$) et leurs limitations nous ont incité à utiliser les possibilités offertes par le système de sélection du dispositif expérimental [Chap. III] pour étudier directement les actions entre gouttes se déplaçant le long de la ligne des centres dans le cas de nombres de REYNOLDS supérieurs à 1. Une telle étude nous a permis de préciser les conditions d'obtention de gouttes pouvant être considérées comme isolées.

2. Expériences

Pour des conditions fixées de production, nous avons observé des gouttes diversement espacées à une distance donnée de l'orifice d'injection. Cette distance est supérieure à la distance de freinage de gouttes isolées et l'intervalle entre gouttes est réglé en faisant varier la fréquence des impulsions de décharge de l'électrode. Pour chaque observation, nous avons effectué une double prise du vue au moyen du dispositif à double éclair ; nous avons ainsi déterminé les vitesses respectives de deux gouttes successives pour différentes valeurs de la distance entre les centres. Le rapport entre le diamètre des gouttes et le diamètre intérieur du cylindre dans lequel elles sont introduites est compris entre $2.5.10^{-3}$ et 5.10^{-3} ; l'influence des parois sur le mouvement des gouttes est donc parfaitement négligeable [5] .

3. Analyse

L'examen des photographies nous a révélé qu'il n'était pas possible d'obtenir un train de gouttes régulièrement espacées pour des distances entre gouttes inférieures à quelques dizaines de diamètres. Les gouttes se rassemblent en groupes de deux ou trois qui, en première approximation se comportent indépendamment les uns des autres. Nous avons observé des doublets de gouttes différemment espacées obtenus en faisant varier la fréquence de sélection des gouttes non déviées.

4. Résultats

Ils correspondent à des dia mètres de 80 μ, 90 μ et 115 μ sont rassemblés sur les tableaux 4,5, 6 . V_1 désigne la vitesse de la première goutte, V_2 celle de la deuxième et V_M leur moyenne arithmétique. V_S est la vitesse limite de chute d'une goutte isolée de même diamètre placée dans les mêmes conditions expérimentales et Re_S le nombre de REYNOLDS construit à partir de V_S. Nous appellerons écartement réduit le rapport $\frac{e}{2R}$ de la distance entre centre au diamètre des gouttes. Les expériences effectuées ici sont caractérisées par le domaine de variation : $2 < Re_S < 4$. Dès que l'écartement réduit est infé-

rieur à 30, nous observons que, de la même façon que dans les conditions correspondant aux hypothèses de STOKES, l'interaction des gouttes entraîne une augmentation sensible de leur vitesse de chute. Un doublet se déplace plus rapidement qu'une goutte isolée. Sur la figure 4 est représentée la variation du rapport V_M / V_S en fonction de l'écartement réduit $e / 2 R$. Nous avons comparé ces résultats avec ceux prédits par la théorie de STIMSON et JEFFERY pour de très faibles nombres de REYNOLDS [$Re \ll 1$] qui sont bien vérifiés expérimentalement [4] . Il est à remarquer que, dans le domaine de variation de nombre de REYNOLDS exploré $2 < Re_s < 4$ la valeur limite du rapport V_M / V_S quand la distance entre centre tend vers zéro dépend peu du nombre de REYNOLDS Re_s . Cette valeur limite est peu différente de celle prévue par STIMSON et JEFFERY.

Re_s	STIMSON et JEFFERY $Re \ll 1$	2.1	2.5	3.8
Lim. V_M/V_S $\frac{e}{2R} \to 1$	1.55	1.56	1.56	1.59

Pour des écartements réduits inférieurs à 10, nous observons que les vitesses V_1 et V_2 ne sont plus égales. V_1 est inférieure à V_2 et les deux gouttes ont tendance à se rattraper. Cette différence entre les vitesses V_1 et V_2 n'est pas prévue par la théorie de STIMSON et JEFFERY [4] . Une théorie approchée due à OSEEN rend compte de cet effet [6] . Les tableaux 4, 5, 6 présentent une comparaison entre les vitesses relatives $\frac{V_2 - V_1}{V_s}$ prévues par la théorie d'OSEEN et déterminées expérimentalement.

Nous retiendrons de cette étude expérimentale que pour étudier des gouttes en chute libre l'une derrière l'autre et néanmoins isolées les unes des autres, nous devons faire en sorte que les distances entre les centres restent supérieures à 30 diamètres dans la zone d'observation.

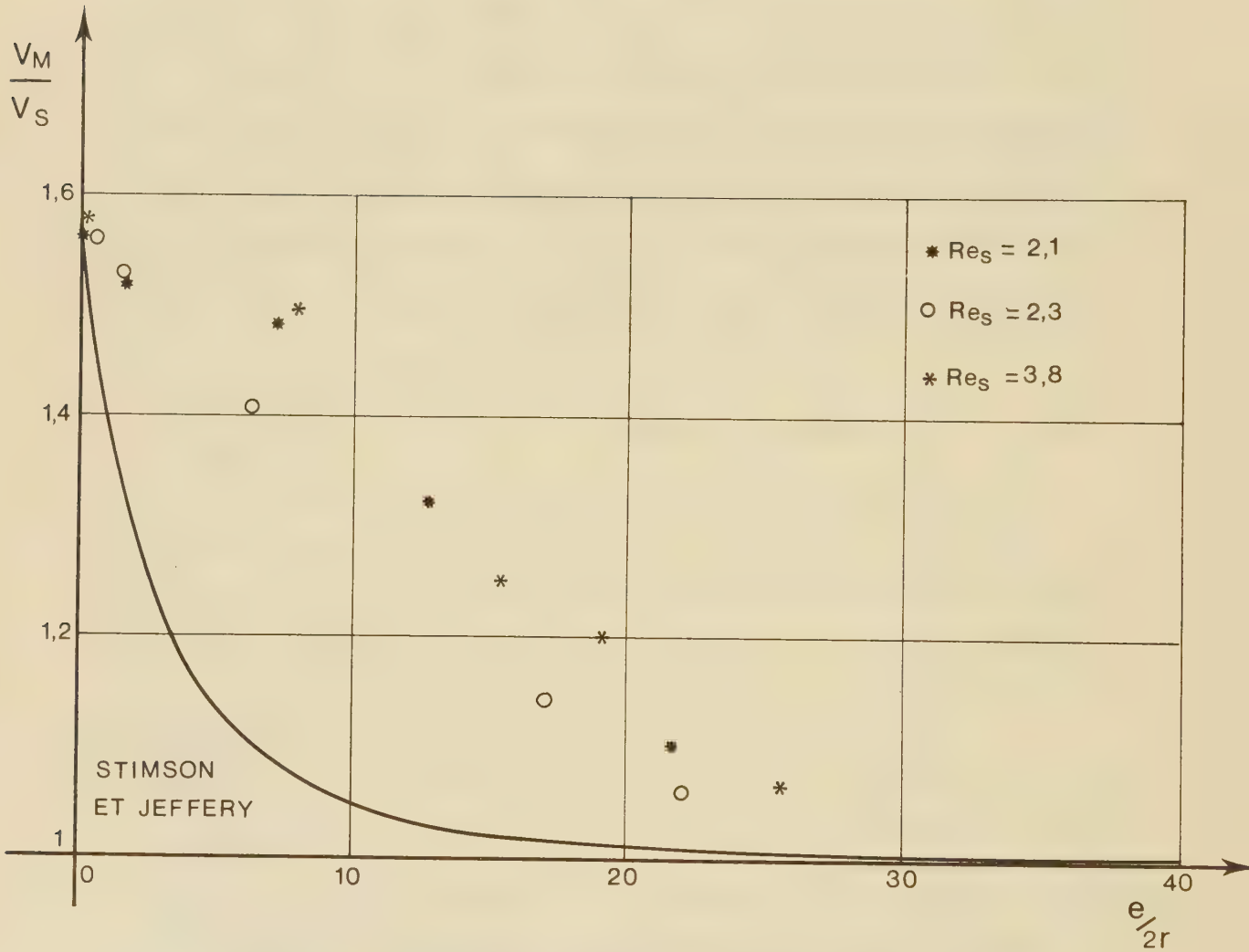


Fig 4 : INTERACTIONS DES GOUTTES

III - EVAPORATION DES GOUTTES

A - GENERALITES

Nous avons effectué une observation directe de gouttes en cours d'évaporation , les nombres de REYNOLDS correspondants restent petits. Nous avons déterminé expérimentalement les diamètres et les vitesses des gouttes. Cet ensemble de mesures constitue le principal résultat de notre étude expérimentale en vue duquel cette installation a été réalisée. Les résultats précédents, obtenus en l'absence d'évaporation ont servi à préciser les conditions de fonctionnement et d'observation.

B - EXPERIENCES

1. Caractéristiques des essais

Ces expériences sont groupées en trois séries dont les caractéristiques apparaissent sur le tableau suivant.

Essais	Pression (bar)	Température de vapeur (°C)	Rayon initial des gouttes (m)	Vitesse initiale des gouttes (m/s)
1	1	129	40.10^{-6}	4.5
2	1	158	38.10^{-6}	4.3
3	1	191	35.10^{-6}	4.1

2. Réglage des observations

En vue d'obtenir des conditions expérimentales analogues aux conditions dans lesquelles l'étude théorique que nous avons effectuée est valable, nous avons voulu observer des gouttes satisfaisant aux impératifs suivants.

Chaque goutte observée doit être isolée des autres gouttes produites par le générateur ; notre étude expérimentale préalable (II.B) montre que, pour satisfaire à cette condition, nous devons régler la fréquence de sélection de notre générateur de gouttes de telle manière que la distance entre deux gouttes consécutives reste supérieure à 30 diamètres dans la zone des observations.

Les dimensions d'une goutte observée doivent être suffisamment grandes pour que la précision des mesures de rayon reste acceptable. L'erreur absolue sur la mesure au rayon est constante et nous arrêtons nos mesures quand le rayon d'une goutte devient inférieur à 15 microns. L'erreur relative sur la mesure du rayon est alors de 15 %.

Pour comparer les résultats expérimentaux avec les résultats théoriques, nous désirons que le nombre de REYNOLDS d'une goutte observée soit petit. Si nous observons des gouttes trop proches de l'orifice d'injection,leur vitesse est trop élevée pour satisfaire à cette condition. Nous effectuons nos observations à une distance de l'orifice d'injection suffisamment grande pour que les gouttes aient atteint la vitesse de chute libre correspondant à leur rayon initial. Nous avons vu antérieurement comment estimer cette distance et nous effectuons cette évaluation en négligeant l'évaporation de la goutte au cours de cette période de freinage. Cette hypothèse est justifiée car la durée du freinage est petite devant la durée de vie de la goutte que nous estimons en supposant la goutte immobile. Les résultats de cette évaluation sont présentés sur le tableau suivant et nous pouvons estimer que la variation relative du rayon au cours du freinage reste inférieure à 5 % .

Essai	Nombre de REYNOLDS initial	Nombre de REYNOLDS final	Distance de freinage (m)	Durée de freinage (s)	Durée de vie de la goutte (s)
1	19	1.3	0.14	0.13	3.8
2	14	0.9	0.10	0.11	1.5
3	10	0.4	0.08	0.09	0.8

Nous effectuerons donc observations et mesures à une distance de l'orifice d'injection supérieure à la distance de freinage calculée précédemment.

3. Résultats

La réalisation d'une expérience a été décrite antérieurement (Chap. III.III). Les résultats sont constitués d'ensembles de valeurs de rayon et de vitesse mesurées tout au long de la trajectoire commune aux gouttes observées. Les expériences ont été réalisées à la pression atmosphérique et pour chaque condition de température et de production de gouttes; nous avons effectué deux essais. Les résultats sont présentés sur les tableaux 7, 8 et 9 et les figures 5 à 10.

C - ANALYSE

Considérons une goutte parfaitement sphérique de rayon $R(t)$ en cours d'évaporation et est animée par rapport à un repère fixe d'un mouvement de translation de vitesse $V(t)$ identique en chaque point du liquide. Nous désignons par $v(t)$ la vitesse de l'interface par rapport à un repère lié à la goutte. L'application du principe fondamental de la dynamique au continuum fluide que constitue le liquide permet de déterminer le système vectoriel $\vec{F}$ des forces instantanées exercées sur la goutte de masse M dont le volume Ω est limité par la surface Σ orientée par la normale extérieure $\vec{n}$.

$$\vec{F} \sim -\iiint_{\Omega} \rho \vec{g} \, d\omega + \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \vec{V} \, d\omega$$

Or :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \vec{V} \, d\omega = \frac{d}{dt}(M \vec{V}) + \vec{V} \iint_{\Sigma} \rho (\vec{V} - \vec{v}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

et :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega}\rho\, d\omega = 0 = \frac{dM}{dt} + \iint_{\Sigma}\rho\,(\vec{V}-\vec{v})\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

On en déduit immédiatement que :

$$\vec{F} \sim -M\vec{g} + M\frac{\vec{dV}}{dt}$$

Nous projetons cette relation vectorielle sur la trajectoire orientée par $\vec{g}$ et nous définissons le coefficient de traînée par :

$$C_D = F / \pi R^2 \rho_G \frac{V^2}{2}$$

D'où :

$$M\frac{dV}{dt} = Mg - C_D R^2 \frac{\rho_G V^2}{2} - V\frac{dM}{dt}$$

A partir de la définition du nombre de NUSSELT Nu de la goutte, nous pouvons écrire :

$$\frac{dM}{dt} = -2 R K_G \frac{T_2 - T_s}{\mathcal{L} - \frac{q_R}{\frac{dM}{dt}}} \times Nu$$

où $\mathcal{L}$ représente la chaleur latente de vaporisation et q_R l'énergie transmise à la goutte par rayonnement (Chapitre I,1).

L'évolution de la goutte est entièrement déterminée par le système d'équations différentielles suivant complété de conditions initiales.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -C_D \cdot \dfrac{3\ \rho_G\ V^2}{8\ \rho_L\ R} + g \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = -\dfrac{K_G}{\rho_L\ C_{p_G}}\ \dfrac{1}{2\ R}\ B \cdot Nu \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = V \\[2ex] \text{avec } V(o) = V_o\ ,\ R(o) = R_o\ ,\ x(o) = x_o \end{cases}$$

$x - x_o$ représente la distance parcourue par la goutte.

D - COMPARAISON AVEC LA THEORIE

A partir de ces équations il est possible d'obtenir le coefficient de traînée C_D, le nombre de NUSSELT Nu et le nombre de PECLET caractérisant la goutte à chaque instant en fonction de quantités mesurées expérimentalement.

$$(2)\quad \begin{cases} C_D = \dfrac{8\ \rho_L}{\rho_G}\ \dfrac{R}{3\ V}\ \left(g - \dfrac{dV}{dx} \right) \\[2ex] Nu = -\dfrac{\rho_L\ C_{p_G}}{K_G}\ 2\dfrac{RV}{B}\ \dfrac{dR}{dx} \\[2ex] Pe = 2\ R\ V \cdot \dfrac{\rho_G\ C_{p_G}}{K_G} \end{cases}$$

Ces formules font intervenir des quantités $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{dR}{dx}$ obtenues par dérivation à partir de résultats expérimentaux $V(x)$ et $R(x)$. Une telle opération introduit une erreur importante et difficile à évaluer sur le résultat final. Il ne faut donc pas s'étonner de la dispersion des résultats concernant le coefficient de traînée et le nombre de NUSSELT obtenus directement à partir de nos expériences au moyen des formules et portés sur les figures 11 et 12. Dans ces conditions, il est délicat de juger de cette manière directe de la validité des résultats théoriques établis au chapitre II. C'est pourquoi nous avons eu recours à une comparaison au niveau des mesures expérimentales elles-mêmes.

Nous remplaçons dans les équations d'évolution (1) le nombre de NUSSELT Nu et le coefficient de traînée C_D par leurs développements asymptotiques en fonction du nombre de PECLET déterminés jusqu'à l'ordre Pe^2 au chapitre II (formules (40) et (41)). Il est alors aisé d'intégrer numériquement le système (1) et d'obtenir des couples de valeurs calculées (V, R) et (R, x) que nous comparons directement aux valeurs expérimentales obtenues. La comparaison est effectuée sur les figures 5 à 10. Compte-tenu de l'incertitude absolue commise sur la mesure du rayon (chapitre III, IV), l'accord, sans être excellent, est néanmoins satisfaisant. Les valeurs du nombre de PECLET correspondant à nos expériences sont inférieures à 1.3. Dans ces conditions, l'accord entre les résultats expérimentaux et les résultats d'un calcul fondé sur la théorie établie antérieurement est satisfaisant. Il serait très intéressant de reprendre des expériences analogues pour des valeurs beaucoup plus élevées du paramètre de surchauffe B qui conduiraient à des interactions beaucoup plus fortes entre transfert de masse et transfert thermique. Les difficultés expérimentales déjà importantes dans le cas présent se trouveraient alors fortement accrues.

IV - CONCLUSION

Le but de cette étude expérimentale était l'observation directe des caractéristiques dynamiques et thermiques d'une goutte d'eau isolée en mouvement relatif par rapport à une atmosphère calme de vapeur surchauffée. Ces expériences devaient permettre la vérification de théories établies antérieurement.

Nous avons été amenés à construire un dispositif original de production et d'observation de gouttes qui a rendu possible une analyse directe de leur évolution. L'utilisation de ce dispositif expérimental nous a permis d'étudier, en l'absence d'évaporation, les interactions des gouttes et leur comportement en mouvement non uniforme.

Des observations directes d'évaporation ont été réalisées pour une pression de 1 bar et différentes températures de la vapeur ; elles ont permis de mesurer la vitesse et le diamètre d'une goutte durant son évaporation. Pour des nombres de PECLET inférieurs à 1.3 les résultats théoriques établis antérieurement permettent de rendre compte d'une façon correcte de nos résultats expérimentaux.

LISTE DE REFERENCES

[1] LUNNON R. : Proc. Roy. Soc. 110. A. 302 (1926).

[2] LAWS J. : J. Trans. Amer. Geophys. Union 22. 709 (1941).

[3] INGEBO. R.D. : Drag coefficients for droplets and solid spheres in clouds accelerating in airstreams, NACA Technical Note 3762 (1956).

[4] STIMSON M. & JEFFERY G.B. : Proc. Roy. Soc. (LONDON) A 111 (1926) 110.

[5] HAPPEL J. & BRENNER H. : Low REYNOLDS Numbers hydrodynamics. Prentice Hall (1965).

[6] OSEEN C.W. : Hydrodynamik LEIPZIG Akademische Verlag (1927).

[7] KLYACHKO L. : Otopl i ventil N°4 (1934).

[8] BEARD K.V. & PRUPPACHER H.R. : J. Atmos. Sci. 26 1066 (1969).

[9] MONTLUCON J. : Etude expérimentale du comportement d'une goutte en mouvement non uniforme. C.R. Acad. Sc. t 274 , p.424-426 Série A. Séance du 31.1.1972.

[10] MONTLUCON J. : Communication présentée devant le Groupe Européen de Double Phase. ROME - Casaccia , Juin 1972.

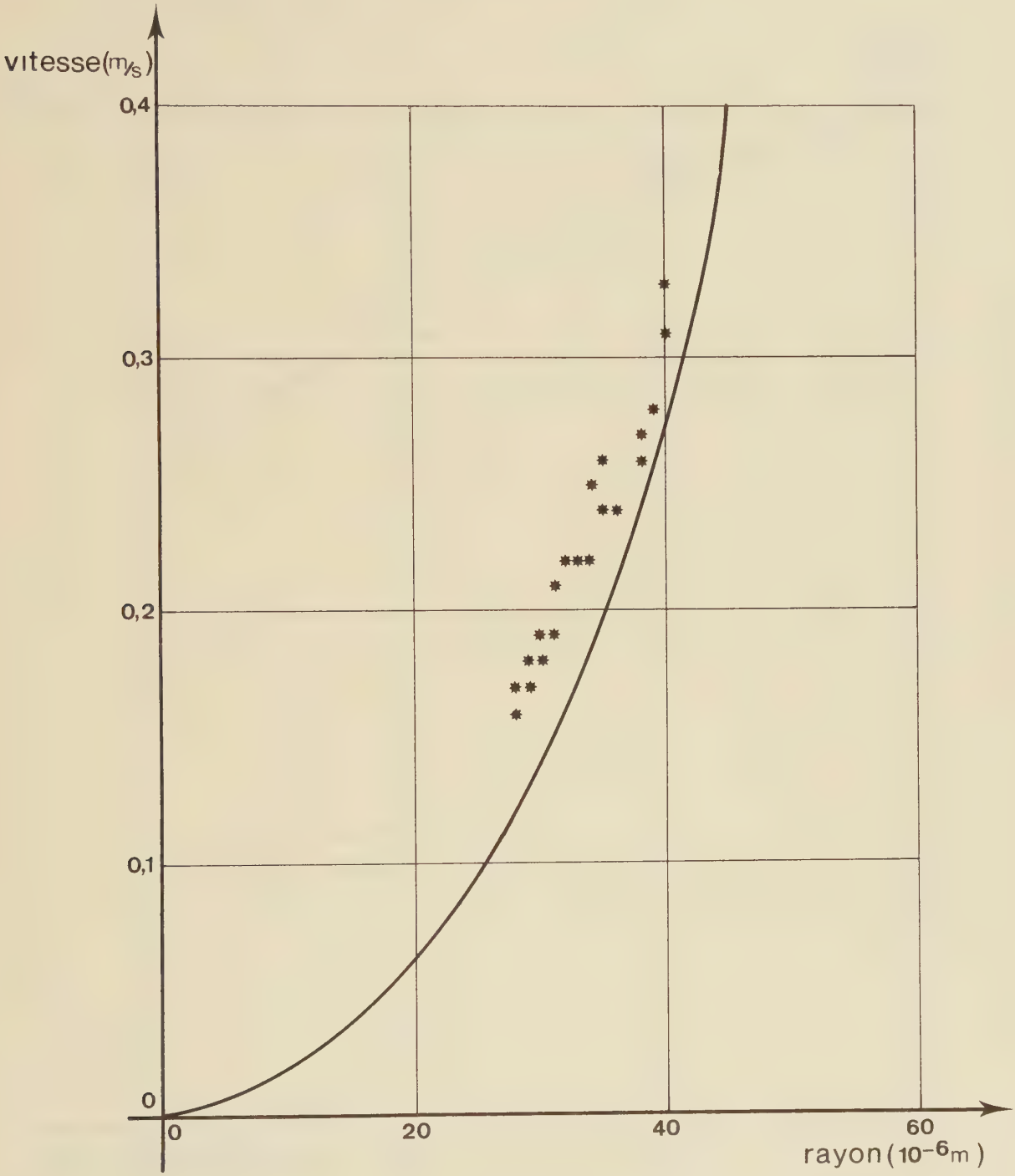


Fig 5: EVAPORATION DES GOUTTES (T_{vap}=129°C)

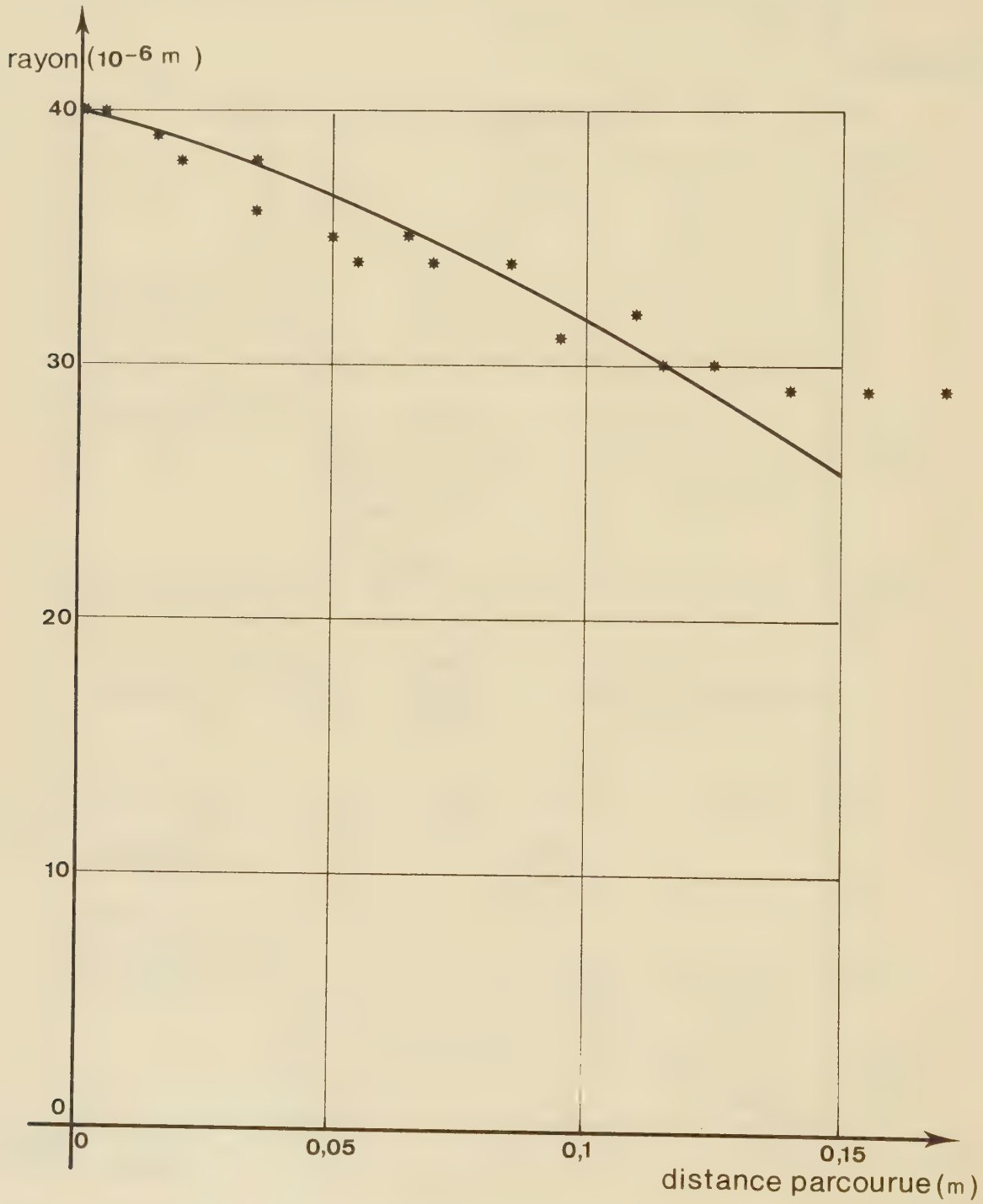


Fig 6 : EVAPORATION DES GOUTTES (T_{vap} = 129°C)

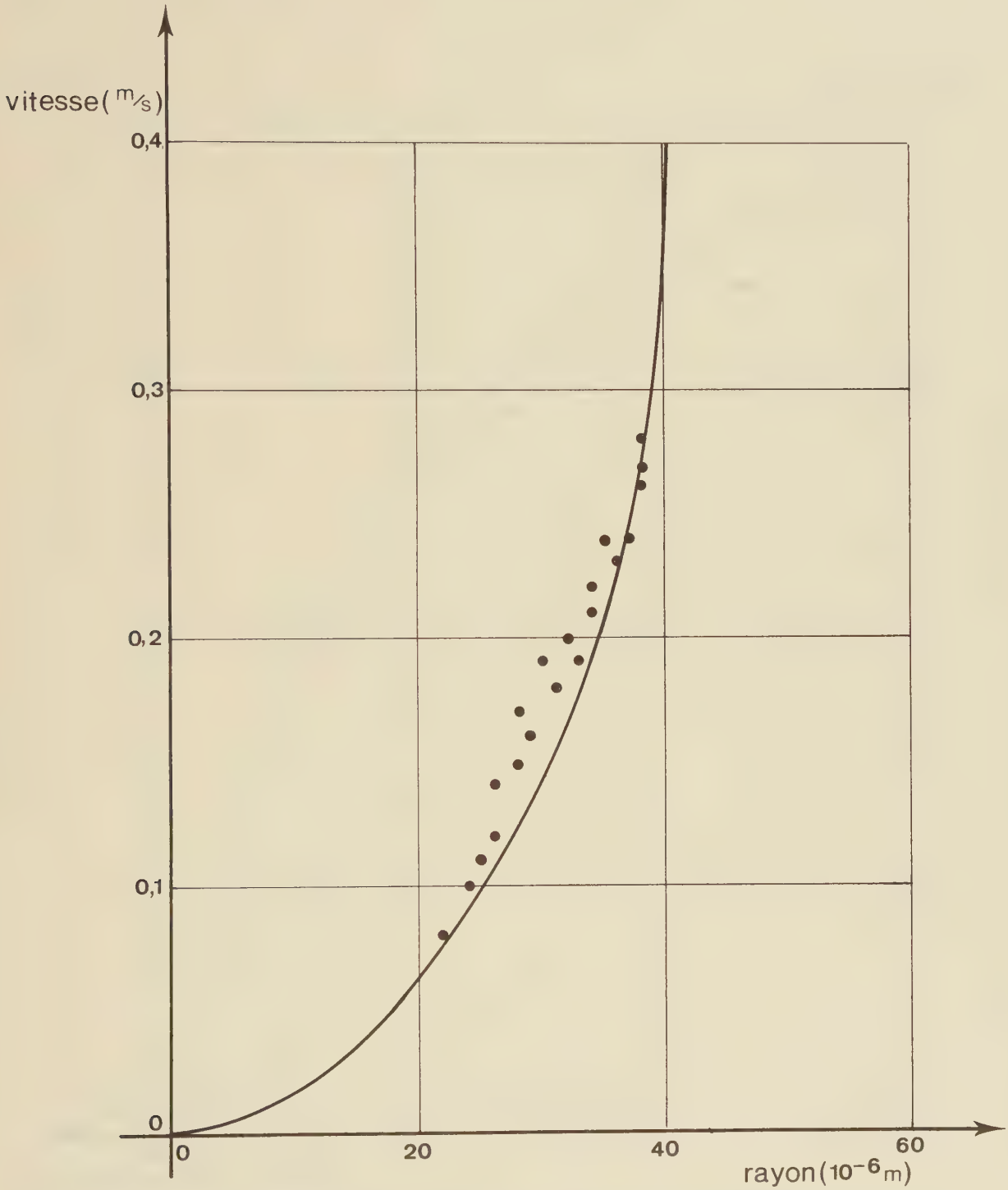


Fig 7 : EVAPORATION DES GOUTTES (T_{vap}=158 °C)

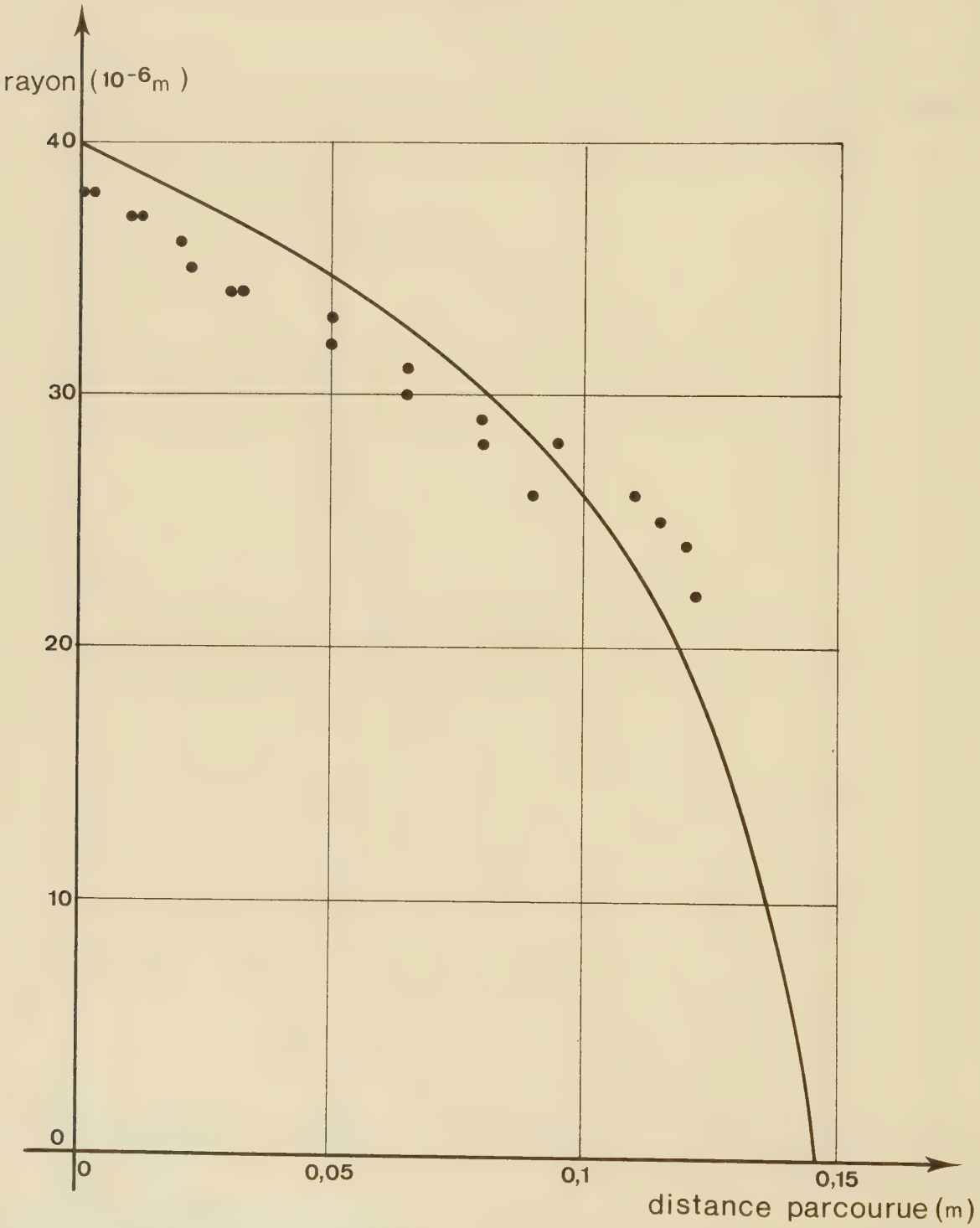


Fig 8 : EVAPORATION DES GOUTTES (T_{vap} = 158°C)

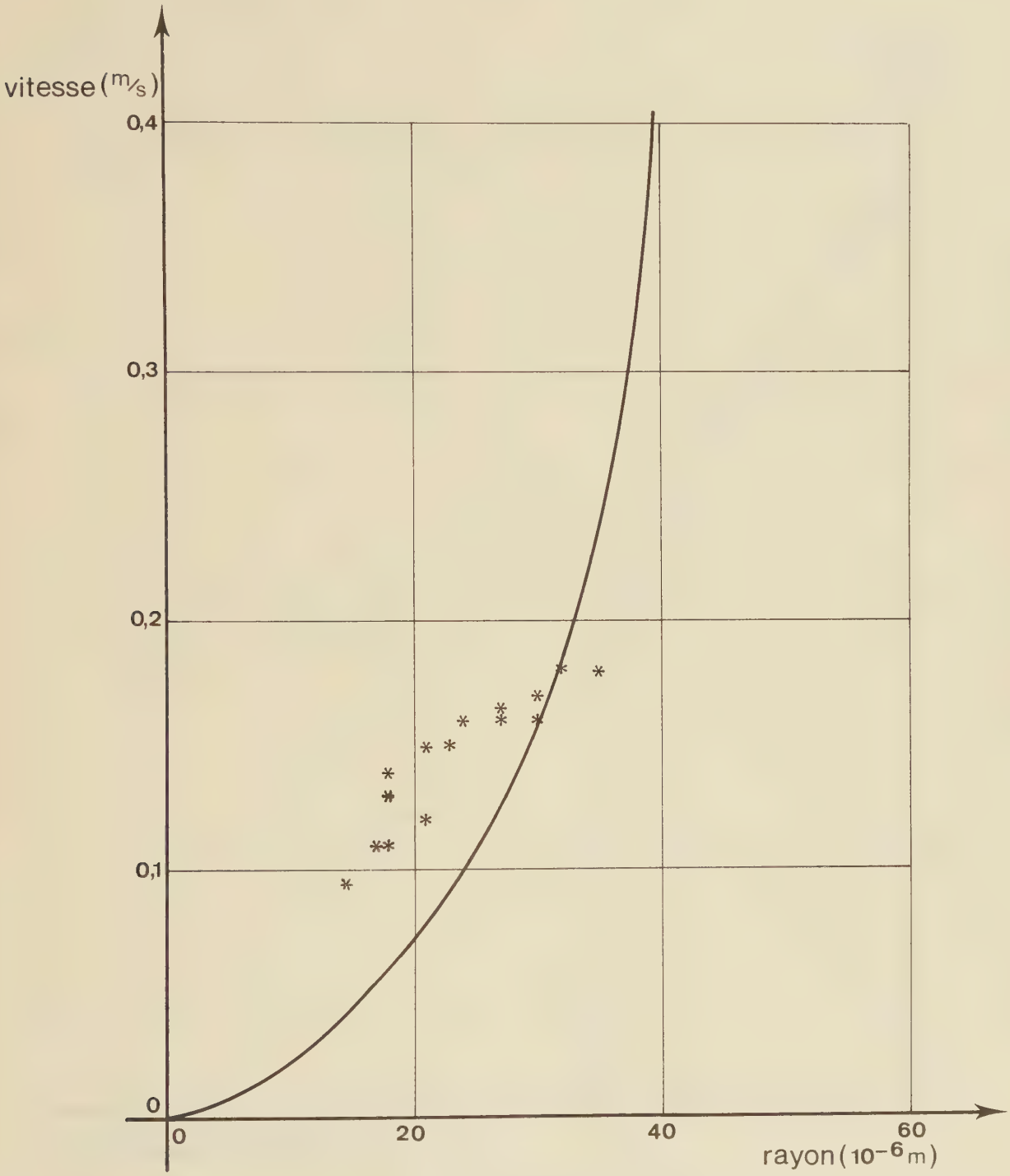


Fig 9 : EVAPORATION DES GOUTTES (T_{vap} = 191°C)

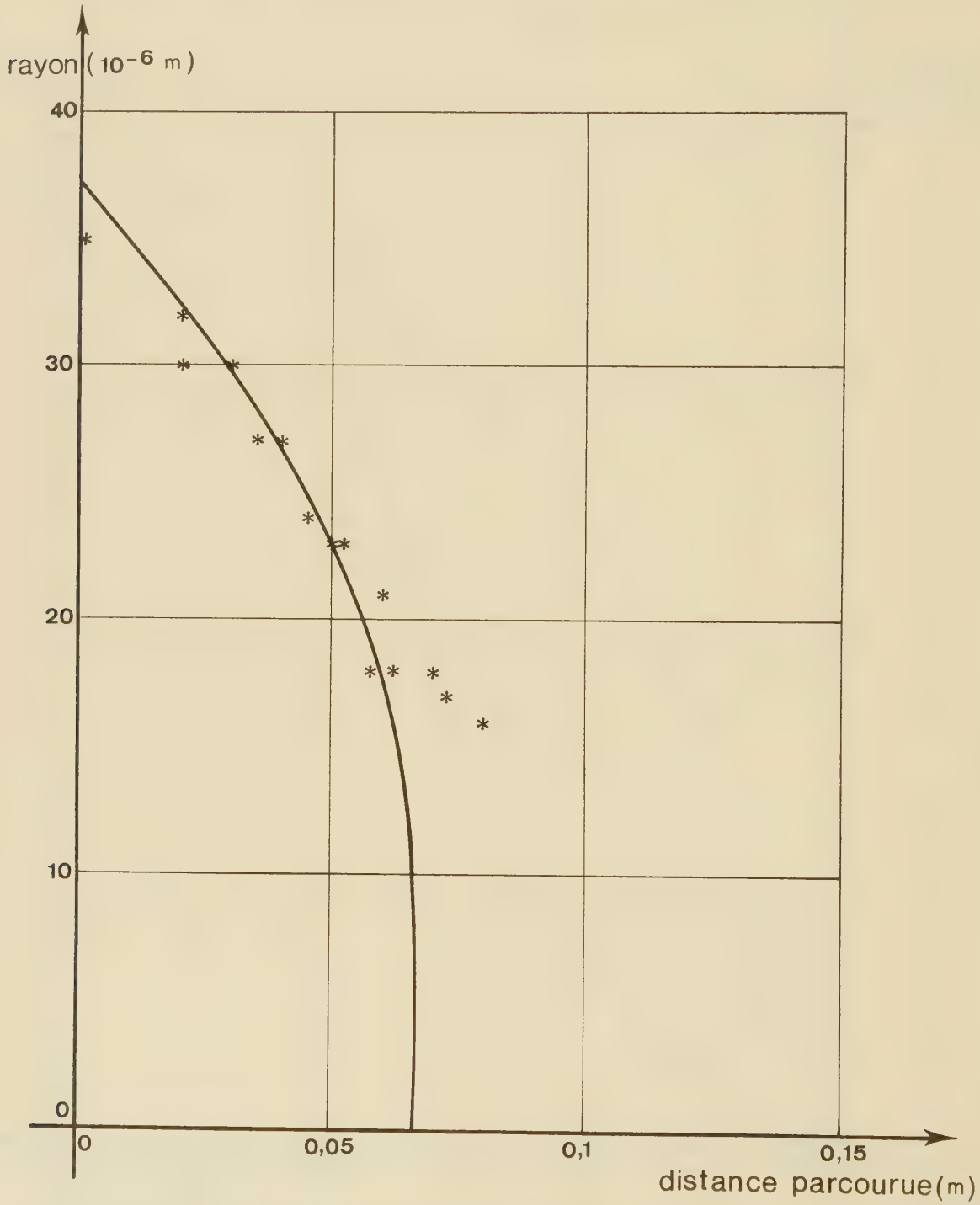


Fig 10 : EVAPORATION DES GOUTTES (Tvap= 191°C)

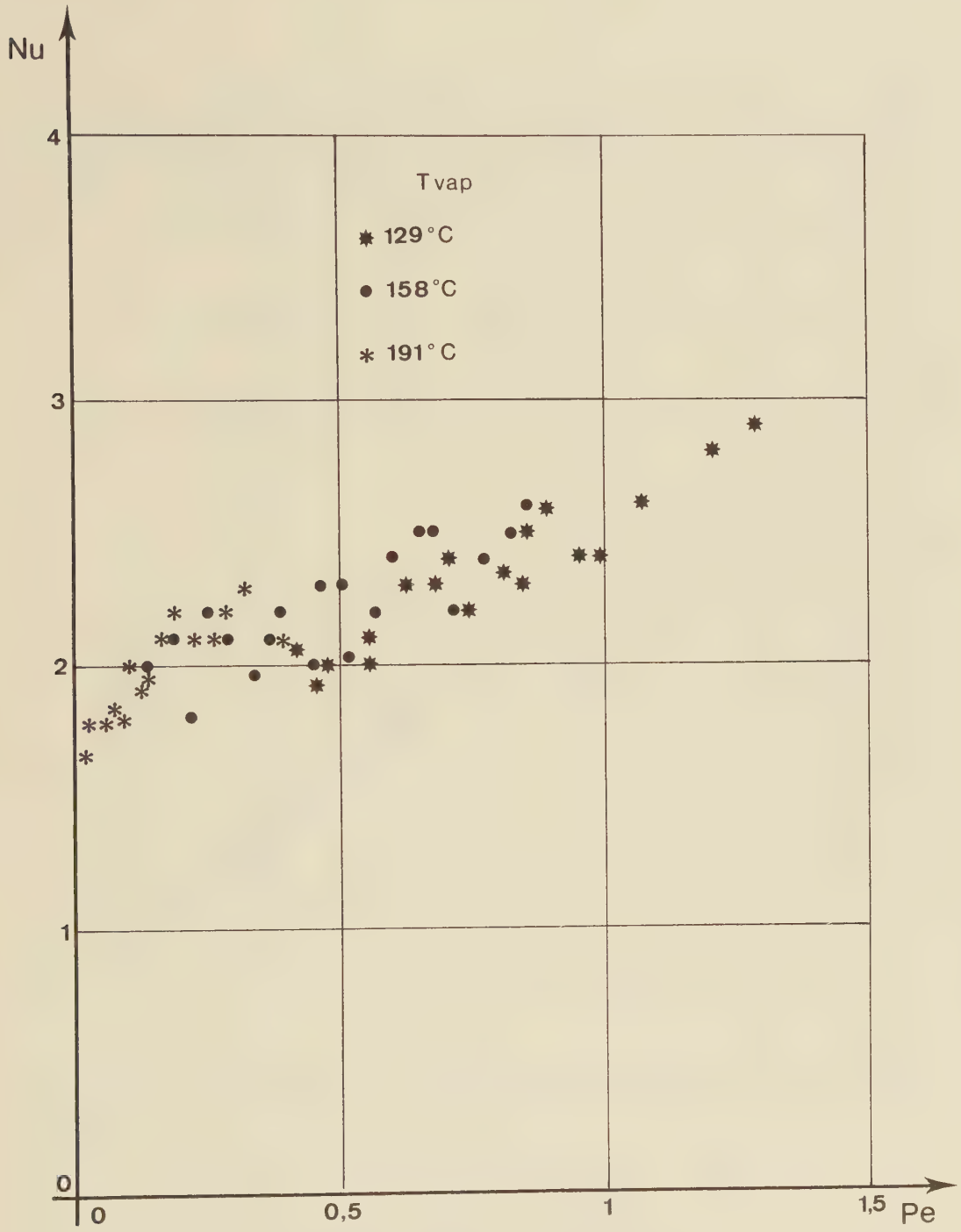


Fig 11 : NOMBRE DE NUSSELT (résultats expérimentaux)

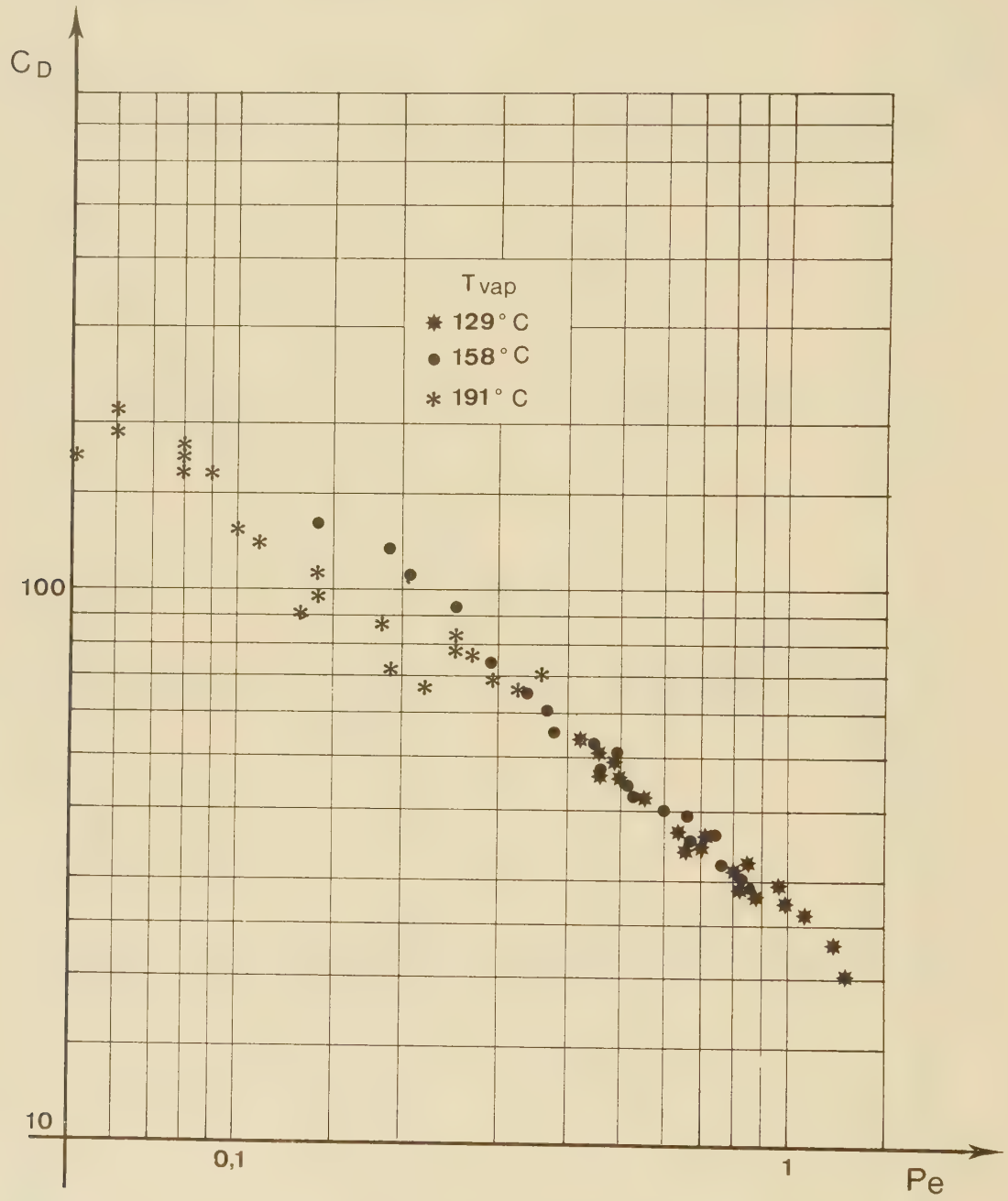


Fig 12 : COEFFICIENT DE TRAINEE
(résultats expérimentaux)

Distance parcourue (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s2)	Re	10^4 . A_c	C_D
0	4.92	392	33	16	2.13
0.01	4.10	294	28	17	2.23
0.02	3.32	218	23	20	2.55
0.03	2.71	162	18.5	22	2.88
0.04	2.26	117	14.9	25	3.32
0.05	1.66	76	11.4	27	3.86
0.06	1.22	49	8.39	32	4.83
0.07	0.86	29	5.92	39	6.41
0.08	0.56	13	3.85	42	8.88
0.09	0.38	3.2	2.61	21	11.
0.10	0.32	1.2	2.20	11	13.1
0.11	0.30	0.8	2.06	9	14.4
0.12	0.28	0	1.92	0	15.3

Diamètre : 105 µ

TABLEAU 1 : FREINAGE D'UNE GOUTTE.

Distance parcourue	Vitesse	Accélération	Re	$10^4 \cdot A_o$	C_D
0	4.9	323	41.6	17.	2.22
0.01	4.25	262	36.8	18	2.31
0.02	3.66	195	31.7	19	2.35
0.03	3.16	147	27.4	19	2.41
0.04	2.72	110	23.6	19	2.47
0.05	2.36	83	20.4	19	2.56
0.06	2.03	63	17.6	20	2.71
0.07	1.72	50	15.4	22	2.90
0.08	1.44	40	12.5	25	3.69
0.09	1.18	30	10.2	28	4.40
0.10	0.94	20	8.10	29	5.19
0.11	0.74	12	6.4	28	6.07
0.12	0.62	7	5.4	24	6.81
0.13	0.52	4	4.5	19	7.85
0.14	0.48	2	4.16	11	7.82
0.15	0.44	0.7	3.87	5	8.35

Diamètre : 132 μ

TABLEAU 2 : FREINAGE D'UNE GOUTTE.

Distance parcourue	Vitesse	Accélération	Re	$10^4 . A_c$	C_D
0.02	3.8	122.5	51.3	19	2.19
0.05	2.85	64.1	38.5	16	2.18
0.10	1.95	26.3	26.3	15	2.27
0.15	1.38	11.5	18.6	13	2.68
0.20	1.02	5.5	13.8	11	3.52
0.25	0.82	2.1	11.1	6	4.23
0.30	0.76	0.8	10.3	3	4.38
0.35	0.72	0.14	9.7	0.6	4.60
0.40	0.70	0	9.4	0	4.80

Diamètre : 212 µ

TABLEAU 3 : FREINAGE D'UNE GOUTTE.

e / 2r	1	2	7	13	21	27
V_1	0.45	0.44	0.44	0.40	0.33	0.32
V_2	0.48	0.47	0.45	0.40	0.33	0.32
V_M / V_S	1.56	1.54	1.49	1.33	1.11	1.07
$\frac{V_1 - V_2}{V_s}$ (expérience)	0.12	0.0843	0.033	0	0	0
$\frac{V_1 - V_2}{V_s}$ (théorie d'OSEEN)	0.434	0.28	0.099	0.055	0.034	0.027

$Re_s = 2.1$

TABLEAU 4 : INTERACTION DES GOUTTES.

$\ell / 2r$	1	2	6	17	22	30
V_1	0.46	0.45	0.43	0.36	0.33	0.32
V_2	0.49	0.48	0.46	0.36	0.33	0.32
V_M / V_S	1.56	1.54	1.43	1.16	1.07	1.06
$\frac{V_1 - V_2}{V_s}$ (expérience)	0.10	0.10	0.09	0	0	0
$\frac{V_1 - V_2}{V_s}$ (théorie d'OSEEN)	0.45	0.34	0.10	0.04	0.03	0.02

$Re_s = 2.3$

TABLEAU 5 : INTERACTION DES GOUTTES.

e / 2r	1	8	15	19	25	28
V_1	0.68	0.63	0.54	0.52	0.48	0.47
V_2	0.72	0.67	0.56	0.52	0.48	0.47
V_M / V_S	1.59	1.49	1.25	1.19	1.08	1.06
$\frac{V_1 - V_2}{V_s}$ (expérience)	0.09	0.09	0.05	0	0	0
$\frac{V_1 - V_2}{V_s}$ (théorie d'OSEEN)	0.56	0.12	0.05	0.64	0.02	0.02

$Re_s = 3.8$

TABLEAU 6 : INTERACTION DES GOUTTES.

Distance x 10^2 (m)	Rayon x 10^6 (m)	Vitesse (m/s)
ESSAI N° 1		
0.5	40	0.31
2	38	0.27
3.5	36	0.24
5.5	34	0.22
6.5	35	0.26
9.5	31	0.21
11	32	0.22
12.5	30	0.19
15.5	29	0.18
18.2	28	0.17
ESSAI N° 2		
0	40	0.33
1.5	39	0.28
3.5	38	0.26
5	35	0.24
7	34	0.25
8.5	33	0.22
11.5	30	0.19
14	29	0.18
17	29	0.17
18.5	28	0.16

TABLEAU N° 7 : EVAPORATION DES GOUTTES

Pression : 1 bar

Température vapeur : 129°C

Distance x 10^2 (m)	Rayon x 10^6 (m)	Vitesse (m/s)
ESSAI N° 3		
0	38	0.27
1	37	0.24
2.2	35	0.24
3	34	0.22
5	32	0.20
6.5	31	0.18
8	29	0.16
9.5	28	0.15
11.5	25	0.11
12.2	22	0.08
ESSAI N° 4		
0	38	0.28
1	37	0.26
2	36	0.23
3.2	34	0.21
5	33	0.19
6.5	30	0.19
8	28	0.17
9	26	0.14
11	26	0.12
12	24	0.10

TABLEAU N° 8 : EVAPORATION DES GOUTTES

Pression : 1 bar

Température vapeur : 158°C

Distance x 10^2 (m)	Rayon x 10^6 (m)	Vitesse (m/s)
ESSAI N° 5		
2	32	0.18
3	30	0.16
4	27	0.16
5	23	0.15
6	21	0.12
7	18	0.11
8	16	0.10
ESSAI N° 6		
0	35	0.18
2	30	0.17
3.5	27	0.16
4.5	24	0.16
5	21	0.15
5.8	18	0.14
6.2	18	0.13
7.3	17	0.11

TABLEAU N° 9 : EVAPORATION DES GOUTTES Pression : 1 bar

Température vapeur : 191°C

Nombre de REYNOLDS	Nombre de PECLET	Coefficient de traînée	Nombre de NUSSELT
1.29	1.28	20	2.9
1.22	1.20	23	2.8
1.07	1.06	26	2.6
1.01	0.99	27	2.4
0.97	0.96	29	2.4
0.89	0.88	27	2.6
0.85	0.84	32	2.3
0.83	0.82	28	2.5
0.82	0.81	31	2.3
0.73	0.72	36	2.2
0.71	0.70	35	2.4
0.69	0.68	34	2.3
0.64	0.63	36	2.3
0.56	0.55	42	2.1
0.56	0.55	43	2.0
0.51	0.50	45	2.1
0.50	0.49	48	1.9
0.48	0.47	50	1.9
0.47	0.46	48	2.0
0.44	0.43	53	2.1

TABLEAU N° 10 : EVAPORATION DES GOUTTES

Pression : 1 bar

Température: 129°C

B : 0.026

Nombre de REYNOLDS	Nombre de PECLET	Coefficient de traînée	Nombre de NUSSELT
0.88	0.85	29	2.6
0.84	0.82	30	2.5
0.79	0.77	32	2.4
0.73	0.71	36	2.2
0.69	0.67	35	2.5
0.68	0.66	39	2.5
0.62	0.60	40	2.4
0.59	0.57	43	2.2
0.53	0.51	45	2.1
0.52	0.50	50	2.3
0.47	0.46	48	2.3
0.46	0.45	53	2.0
0.39	0.38	55	2.2
0.38	0.37	62	2.1
0.35	0.34	67	1.9
0.30	0.29	72	2.1
0.26	0.25	94	2.2
0.22	0.21	107	1.8
0.20	0.19	124	2.1
0.14	0.14	134	2.0

TABLEAU N° 11 : EVAPORATION DES GOUTTES

Pression : 1 bar

Température: 158°C

B : 0.05

Nombre de REYNOLDS	Nombre de PECLET	Coefficient de traînée	Nombre de NUSSELT
0.38	0.36	69	2.1
0.34	0.33	65	2.3
0.30	0.29	68	2.2
0.28	0.27	76	2.1
0.26	0.25	69	2.3
0.26	0.25	70	2.1
0.23	0.22	63	2.1
0.20	0.19	69	2.2
0.18	0.17	85	2.1
0.15	0.14	95	2.0
0.15	0.14	105	1.9
0.14	0.13	90	1.8
0.12	0.11	118	2.0
0.11	0.10	124	2.1
0.09	0.09	156	1.8
0.08	0.08	160	1.8
0.08	0.08	160	1.8
0.08	0.08	152	1.9
0.06	0.06	190	1.7
0.06	0.06	170	1.8
0.05	0.05	199	1.6

TABLEAU N° 12 : EVAPORATION DES GOUTTES

Pression : 1 bar

Température : 191°C

B : 0.09

ANNEXE A IV

CALCUL DES DISTANCES ET DES TEMPS DE FREINAGE

Considérons une goutte de rayon r se déplaçant sous l'action de son propre poids dans un milieu de caractéristiques données ; soit V_L la vitesse limite de chute correspondante, Re_L le nombre de REYNOLDS correspondant.

Soit V_I la vitesse initiale de la goutte et Re_I le nombre de REYNOLDS correspondant.

Nous appelons distance et temps de freinage la distance parcourue L par la goutte et le temps mis à la parcourir T avant que sa vitesse atteigne la valeur 1.01 x V_L .

L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{dV}{dt} = - F_M + mg$$

d'où :

$$\int_{Re_I}^{Re'_L} \frac{Re \, d\, Re}{s - C_D \, Re^2} = \frac{3 \rho_G}{8 \rho_L} \frac{L}{r}$$

$$\int_{Re_I}^{Re'_L} \frac{d\, Re}{s - C_D \, Re^2} = \frac{3 \eta T}{16 r^2 \rho_L}$$

avec :

$$s = 32 g \rho_G \rho_L r^3 / 3 \eta^2$$

En supposant que le coefficient de traînée n'est fonction que du nombre de REYNOLDS, et obéit à la formule de KLYACHKO, nous avons déterminé les variations des intégrales en fonction de Re_L pour différentes valeurs du paramètre s.

Les résultats sont présentés sur les figures A_1 et A_2 qui permettent de calculer distance et temps de freinage en négligeant l'influence de la non permanence du mouvement.

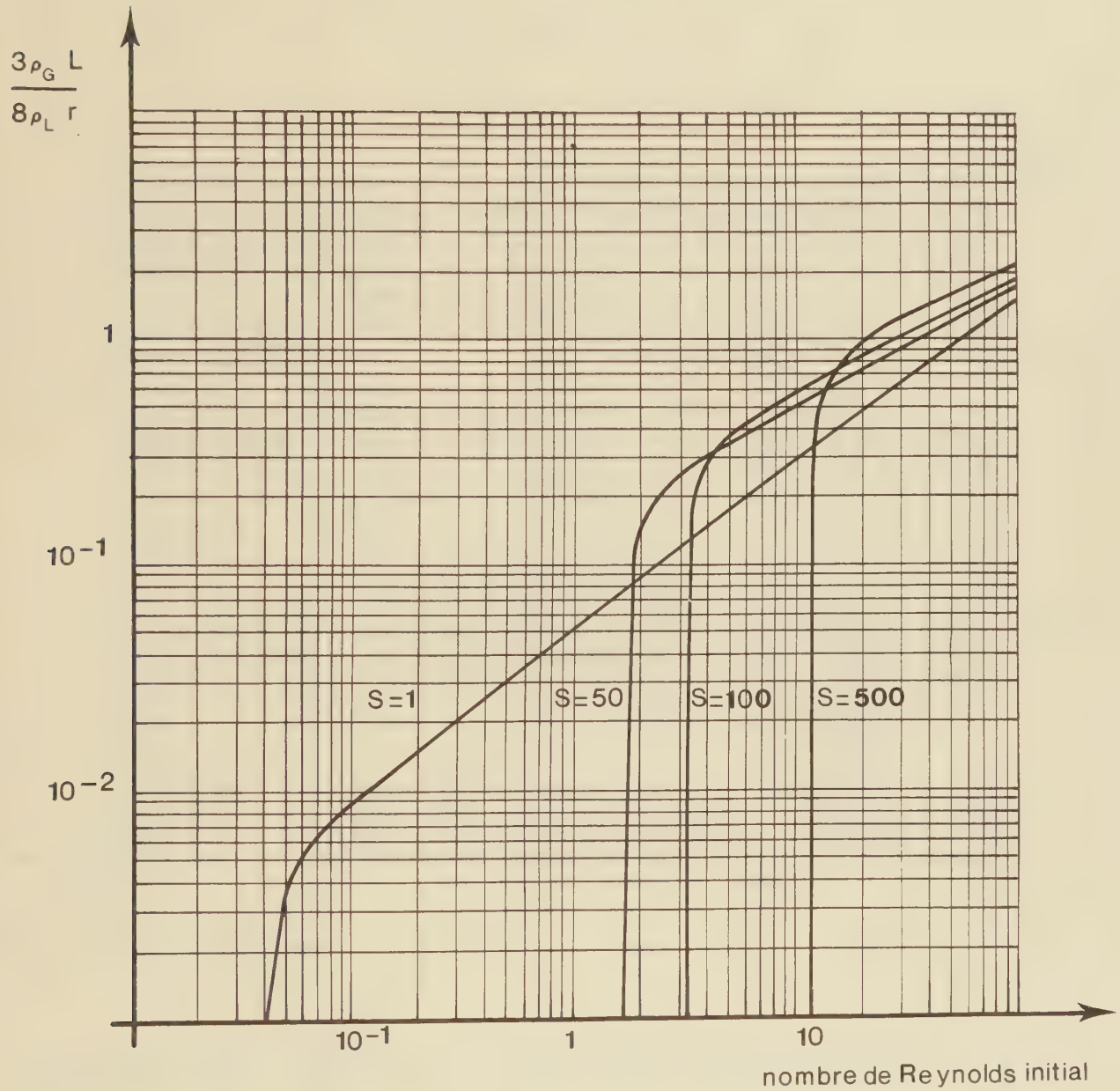


Fig A_1 : DETERMINATION DE LA DISTANCE DE FREINAGE

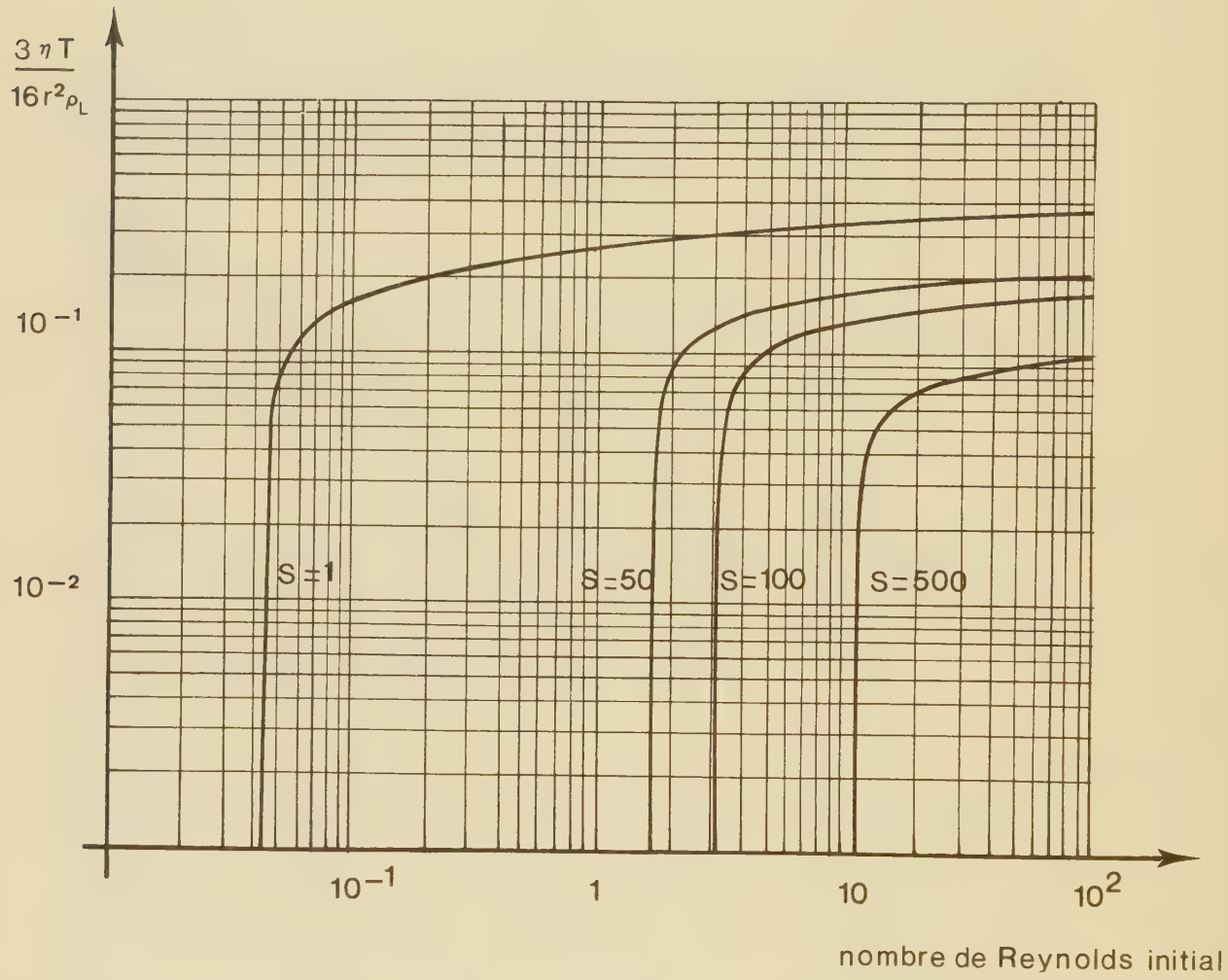


Fig A_2 : DETERMINATION DE LA DUREE DE FREINAGE

Conclusion

Avant de clore cette étude qui avait pour objet l'examen de certains aspects du comportement de gouttes d'eau situées dans une atmosphère de vapeur surchauffée, il convient d'en rappeler ici les points principaux.

La complexité des phénomènes et le grand nombre de paramètres intervenant dans ce problème diphasique nous a conduits à limiter notre étude au cas d'une goutte isolée dans diverses conditions. L'examen d'une goutte immobile dans une atmosphère calme de vapeur surchauffée a permis de déterminer un critère de comportement initial qui montre que, dans des conditions usuelles, l'évaporation d'une goutte est précédée d'une phase de condensation de la vapeur dont les caractéristiques ont été calculées numériquement. La durée de cette période de condensation est faible vis-à-vis de la durée d'existence totale de la goutte et la phase suivante d'évaporation est susceptible d'une solution analytique simple valable dans le cadre d'hypothèses (état quasi permanent, propriétés physiques constantes) justifiées par des résultats expérimentaux antérieurs et une étude numérique complète. Au sein de la vapeur, température et vitesse vérifient les formules :

$$\begin{cases} \dfrac{T(r) - T_{sat}}{T_\infty - T_{sat}} = \dfrac{(1+B)^{1-\frac{R}{r}} - 1}{B} \\ V(r) = \alpha \dfrac{R}{r^2} \operatorname{Log}(1+B) \end{cases} \qquad \text{(Chap. I , (16))}$$

L'analyse du comportement d'une goutte en mouvement par rapport à une atmosphère calme de vapeur surchauffée a permis de déterminer, dans le cadre des hypothèses justifiées en l'absence de mouvement relatif, une solution semi-analytique de ce problème. Cette solution conduit à des développements asymptotiques du nombre de NUSSELT et du coefficient de traînée de la goutte par rapport au nombre de PECLET construit à partir du rayon.

$$\begin{cases} Nu = \dfrac{2\ \mathrm{Log}(1+B)}{B}\left[1+\dfrac{Pe}{2} - \dfrac{\delta}{3}(B,Pe)\ Pe^2 \mathrm{Log}\ Pe + \epsilon(B,Pr)\ Pe^2\right] \\ \qquad\qquad + O\ (Pe^3\ \mathrm{Log}\ Pe) \\ C_D = C_{D\,P} + C_{D\,M} + C_{D\,F} + O\ (Pe^2) \end{cases} \qquad \text{(Chap. II, (40), (41))}$$

De telles expressions semi-analytiques pourraient être utilisées dans un modèle d'écoulement diphasique à variables locales.

Pour juger des théories précédentes et acquérir des informations dans un domaine assez peu connu expérimentalement une observation et des mesures directes des phénomènes a été entreprise. Pour cela, nous avons réalisé un dispositif original de production et d'observation de gouttes qui permet de remplacer l'examen continu d'une goutte donnée par des observations successives de gouttes identiques émises dans des conditions similaires. Outre des précisions sur le comportement dynamique de gouttes en l'absence d'évaporation, le dispositif réalisé a permis de mesurer les valeurs instantanées du diamètre et de la vitesse de gouttes en chute libre dans une atmosphère calme de vapeur surchauffée. Les résultats expérimentaux et théoriques ont été directement comparés ; l'accord est satisfaisant mais il conviendrait cependant, pour mieux juger de la validité des résultats théoriques établis, d'effectuer des expériences complémentaires caractérisées par des valeurs plus élevées de la surchauffe de la vapeur.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le

le Président de la thèse

VU, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

le Président de l'Université
Scientifique et Médicale

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Publications scientifiques et littéraires
TYPO - OFFSET
05 - GAP - Téléphone 14-23 +
Dépôt légal 435 - 1972